JP.033. Let a, b, c be positive real numbers such that

$$a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}+2abc=1$$

Prove that

$$\frac{\sqrt{bc}}{a}+\frac{\sqrt{ca}}{b}+\frac{\sqrt{ab}}{c}\geq 2(a+b+c)$$

Proposed by Nguyen Viet Hung – Hanoi – Vietnam

Solution by Kevin Soto Palacios – Huarmey – Peru

Siendo a, b, c números reales positivos de tal manera que:

$$a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}+2abc=1$$

Probar que: $\frac{\sqrt{bc}}{a}+\frac{\sqrt{ac}}{b}+\frac{\sqrt{ab}}{c}\geq 2(a+b+c)$ ***... (A)***

Siendo: $A+B+C=\pi$***. En un triángulo*** ABC***, se cumple:***

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

$\Rightarrow$ ***Sea:*** $a\sqrt{bc}=\cos^2 A$, $b\sqrt{ac}=\cos^2 B$, $c\sqrt{ab}=\cos^2 C$,

$abc=\cos A\cos B\cos C>0$ ***(Δ acutángulo)***

Por lo tanto:

$$a=\frac{\cos^3 A}{\cos B\cos C}>0,$$

$$b=\frac{\cos^3 B}{\cos A\cos C}>0,$$

$$c=\frac{\cos^3 C}{\cos A\cos B}>0$$

La desigualdad es equivalente en ... (A):

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 B\cos^2 C}{\cos^4 A}+\frac{\cos^2 A\cos^2 C}{\cos^4 B}+\frac{\cos^2 A\cos^2 B}{\cos^4 C}\geq 2\frac{\cos^3 A}{\cos B\cos C}+2\frac{\cos^3 B}{\cos A\cos C}+2\frac{\cos^3 C}{\cos A\cos B}$$

De la siguiente desigualdad para todos x, y, z números reales, se cumple en un triángulo ABC:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy\cos A + 2yz\cos B + 2zx\cos C$$

Siendo:

$$x = \frac{\cos A\cos C}{\cos^2 B} > 0, y = \frac{\cos B\cos A}{\cos^2 C} > 0, z = \frac{\cos B\cos C}{\cos^2 A} > 0 \rightarrow$$ ***(Δ acutángulo)***

Se obtiene: $$\Rightarrow \frac{\cos^2 B\cos^2 C}{\cos^4 A} + \frac{\cos^2 A\cos^2 C}{\cos^4 B} + \frac{\cos^2 A\cos^2 B}{\cos^4 C} \geq$$

$$\geq 2\frac{\cos^3 A}{\cos B\cos C} + 2\frac{\cos^3 B}{\cos A\cos C} + 2\frac{\cos^3 C}{\cos A\cos B}$$ ***... (LQQD)***