ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE

*Find :*

$$\Omega=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_3=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k_1+k_2+k_3+\dots+k_n}}{k_1k_2k_3\dots k_n(k_1+k_2+k_3+\dots+k_n)}$$

*Proposed by Omkumar Rao-India*

*Solution by Shirvan Tahirov-Azerbaijan*

$$\Omega=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_3=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k_1+k_2+k_3+\dots+k_n}}{k_1k_2k_3\dots k_n(k_1+k_2+k_3+\dots+k_n)}=$$

$$=\int_0^1\left(\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k_1+k_2+k_3+\dots+k_n}x^{k_1+k_2+k_3+\dots+k_n-1}}{k_1k_2k_3\dots k_n}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\frac{1}{x}\left(\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k_1+k_2+k_3+\dots+k_n}x^{k_1+k_2+k_3+\dots+k_n}}{k_1k_2k_3\dots k_n}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{x}\left(\prod_{m=1}^{n}\left(\sum_{k_m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k_m}x^{k_m}}{k_m}\right)\right)dx$$

$$=$$

$$\int_0^1\frac{1}{x}[-\ln(1+x)]^n dx=\int_0^1\frac{(-1)^n ln^n(1+x)}{x}dx\underbrace{\overbrace{=}^{y=\ln(1+x),x=e^y-1}}_{dx=e^ydy}(-1)^n\int_0^{\ln(2)}\frac{y^ne^y}{e^y-1}dy$$

$$\therefore\int_0^1\frac{(-1)^n ln^n(1+x)}{x}dx=(-1)^n\int_0^{\ln(2)}\frac{y^ne^y}{e^y-1}dy$$

$$n=1\Rightarrow\ (-1)^1\int_0^1\frac{ln^1(1+x)}{x}dx=-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx$$

$$\therefore\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int_0^1\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}x^j}{j}\frac{1}{x}dx=$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^1\left(\frac{(-1)^{j-1}x^{j-1}}{j}\right)dx=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\int_0^1 x^{j-1}dx=$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j^2}=\frac{\pi^2}{12}.\quad-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx=-\frac{\pi^2}{12}$$