ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE

If $a,\mathrm{b},\mathrm{c}\ge 0, a\mathrm{b}+\mathrm{bc}+\mathrm{c}a>0$ then prove that :

$$\frac{1}{a+\mathrm{b}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{c}}+\frac{1}{\mathrm{c}+a}\ge\frac{15}{3(a+\mathrm{b}+\mathrm{c})+\sqrt[3]{a\mathrm{bc}}}$$

Proposed by Dang Ngoc Minh-Vietnam

Solution by Soumava Chakraborty-Kolkata-India

If exactly 1 variable equals to zero, (WLOG $a=0;\mathrm{b},\mathrm{c}>0$) then : LHS =

$$\frac{1}{\mathrm{b}}+\frac{1}{\mathrm{c}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{c}}\overset{\text{Bergstrom}}{\ge}\frac{4}{\mathrm{b}+\mathrm{c}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{c}}=\frac{5}{\mathrm{b}+\mathrm{c}}=\frac{15}{3(a+\mathrm{b}+\mathrm{c})+\sqrt[3]{a\mathrm{bc}}}\quad(\because a=0)$$

and now we focus on the case when $a,\mathrm{b},\mathrm{c}>0$ and assigning $\mathrm{b}+\mathrm{c}=x,\mathrm{c}+a=\mathrm{y}$, $a+\mathrm{b}=\mathrm{z}\Rightarrow x+\mathrm{y}-\mathrm{z}=2\mathrm{c}>0,\mathrm{y}+\mathrm{z}-x=2a>0$ and $\mathrm{z}+x-\mathrm{y}=2\mathrm{b}>0$ $\Rightarrow x+\mathrm{y}>\mathrm{z},\mathrm{y}+\mathrm{z}>x,\mathrm{z}+x>\mathrm{y}\Rightarrow x,\mathrm{y},\mathrm{z}$ form sides of a triangle XYZ with semiperimeter, circumradius and inradius $=\mathrm{s},\mathrm{R},\mathrm{r}$ (say); then : $\sum_{\text{cyc}}a=\mathrm{s}$, $a\mathrm{bc}=\mathrm{r}^2\mathrm{s},\sum_{\text{cyc}}a\mathrm{b}=4\mathrm{Rr}+\mathrm{r}^2$ and then, via GM − HM : LHS − RHS =

$$\frac{1}{4\mathrm{Rrs}}\left(\left(\sum_{\text{cyc}}a\right)^2+\sum_{\text{cyc}}a\mathrm{b}\right)-\frac{5}{\sum_{\text{cyc}}a+\frac{a\mathrm{bc}}{\sum_{\text{cyc}}a\mathrm{b}}}$$

$$=\frac{\mathrm{s}^2+4\mathrm{Rr}+\mathrm{r}^2}{4\mathrm{Rrs}}-\frac{5(4\mathrm{Rr}+\mathrm{r}^2)}{\mathrm{s}(4\mathrm{Rr}+\mathrm{r}^2)+\mathrm{r}^2\mathrm{s}}\overset{?}{\ge}0\Leftrightarrow(2\mathrm{R}+\mathrm{r})\mathrm{s}^2\overset{?}{\ge}\mathrm{r}(32\mathrm{R}^2+4\mathrm{Rr}-\mathrm{r}^2)$$

$$\to\text{true}\because(2\mathrm{R}+\mathrm{r})\mathrm{s}^2-\mathrm{r}(32\mathrm{R}^2+4\mathrm{Rr}-\mathrm{r}^2)\overset{\text{Gerretsen}}{\ge}$$

$$(2\mathrm{R}+\mathrm{r})(16\mathrm{Rr}-5\mathrm{r}^2)-\mathrm{r}(32\mathrm{R}^2+4\mathrm{Rr}-\mathrm{r}^2)=2\mathrm{r}^2(\mathrm{R}-2\mathrm{r})\overset{\text{Euler}}{\ge}0$$

$$\therefore\frac{1}{a+\mathrm{b}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{c}}+\frac{1}{\mathrm{c}+a}\ge\frac{15}{3(a+\mathrm{b}+\mathrm{c})+\sqrt[3]{a\mathrm{bc}}}\ \forall\,a,\mathrm{b},\mathrm{c}\ge 0,$$

$''=''$ iff $(a=0<\mathrm{b}=\mathrm{c})$ or $(\mathrm{b}=0<\mathrm{c}=a)$ or $(\mathrm{c}=0<a=\mathrm{b})$ or $a=\mathrm{b}=\mathrm{c}>0$ (QED)