ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE

If $a,\mathrm{b},\mathrm{c} \geq 0$ then prove that :

$$a^4\mathrm{b}+\mathrm{b}^4\mathrm{c}+\mathrm{c}^4a \leq (a^2+\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)\big((a+\mathrm{b}+\mathrm{c})(a\mathrm{b}+\mathrm{bc}+\mathrm{c}a)-8a\mathrm{bc}\big)$$

Proposed by Dang Ngoc Minh-Vietnam

Solution by Soumava Chakraborty-Kolkata-India

If $a=\mathrm{b}=\mathrm{c}=0$ or if exactly 2 variables equal to zero, then LHS $=$ RHS $=0$ and if exactly 1 variable equals to zero, (WLOG $a=0;\mathrm{b},\mathrm{c}>0$) then : RHS $-$ LHS $=\mathrm{bc}(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)(\mathrm{b}+\mathrm{c})-\mathrm{b}^4\mathrm{c}=\mathrm{b}^3\mathrm{c}^2+\mathrm{b}^2\mathrm{c}^3+\mathrm{bc}^4>0$ and now we focus on the case when $a,\mathrm{b},\mathrm{c}>0$ and assigning $\mathrm{b}+\mathrm{c}=x,\mathrm{c}+a=\mathrm{y},a+\mathrm{b}=\mathrm{z}$ $\Rightarrow x+\mathrm{y}-\mathrm{z}=2\mathrm{c}>0,\mathrm{y}+\mathrm{z}-x=2a>0$ and $\mathrm{z}+x-\mathrm{y}=2\mathrm{b}>0\Rightarrow x+\mathrm{y}>\mathrm{z}$, $\mathrm{y}+\mathrm{z}>x,\mathrm{z}+x>\mathrm{y}\Rightarrow x,\mathrm{y},\mathrm{z}$ form sides of a triangle XYZ with semiperimeter, circumradius and inradius $=\mathrm{s},\mathrm{R},\mathrm{r}$ (say); then : $\sum_{\mathrm{cyc}} a=\mathrm{s}, a\mathrm{bc}=\mathrm{r}^2\mathrm{s}$,

$$\sum_{\mathrm{cyc}} a\mathrm{b}=4\mathrm{Rr}+\mathrm{r}^2,\sum_{\mathrm{cyc}} a^2=\mathrm{s}^2-8\mathrm{Rr}-2\mathrm{r}^2,\sum_{\mathrm{cyc}} a^2\mathrm{b}^2=\mathrm{r}^2((4\mathrm{R}+\mathrm{r})^2-2\mathrm{s}^2),$$

$$\sum_{\mathrm{cyc}} a^3=\mathrm{s}^3-12\mathrm{Rrs};\text{then : LHS}-\text{RHS}=\sum_{\mathrm{cyc}}\left(a\mathrm{b}\left(\sum_{\mathrm{cyc}} a^3-\mathrm{c}^3\right)\right)-a\mathrm{bc}\sum_{\mathrm{cyc}}\frac{\mathrm{b}^4}{\mathrm{bc}}-$$

$$\mathrm{s}(\mathrm{s}^2-8\mathrm{Rr}-2\mathrm{r}^2)(4\mathrm{Rr}-7\mathrm{r}^2)\overset{\text{Bergstrom}}{\leq}(4\mathrm{Rr}+\mathrm{r}^2)(\mathrm{s}^3-12\mathrm{Rrs})-$$

$$\mathrm{r}^2\mathrm{s}(\mathrm{s}^2-8\mathrm{Rr}-2\mathrm{r}^2)-\mathrm{r}^2\mathrm{s}.\frac{(\mathrm{s}^2-8\mathrm{Rr}-2\mathrm{r}^2)^2}{4\mathrm{Rr}+\mathrm{r}^2}-\mathrm{s}(\mathrm{s}^2-8\mathrm{Rr}-2\mathrm{r}^2)(4\mathrm{Rr}-7\mathrm{r}^2)\overset{?}{\leq}0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{s}^4-(44\mathrm{Rr}+11\mathrm{r}^2)\mathrm{s}^2+\mathrm{r}(64\mathrm{R}^3+288\mathrm{R}^2\mathrm{r}+132\mathrm{Rr}^2+16\mathrm{r}^3)\boxed{\underset{(*)}{\overset{?}{\geq}}}\,0 \text{ and}$$

$$\because(\mathrm{s}^2-16\mathrm{Rr}+5\mathrm{r}^2)^2\overset{\text{Gerretsen}}{\geq}0\therefore \text{in order to prove }(*),\text{it suffices to prove :}$$

$$\text{LHS of }(*)\overset{?}{\geq}(\mathrm{s}^2-16\mathrm{Rr}+5\mathrm{r}^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 64\mathrm{R}^3+32\mathrm{R}^2\mathrm{r}+292\mathrm{Rr}^2-9\mathrm{r}^3\boxed{\underset{(**)}{\overset{?}{\geq}}}(12\mathrm{R}+21\mathrm{r})\mathrm{s}^2$$

$$\text{Now, }(12\mathrm{R}+21\mathrm{r})\mathrm{s}^2\overset{\text{Rouche}}{\leq}(12\mathrm{R}+21\mathrm{r})\begin{pmatrix}2\mathrm{R}^2+10\mathrm{Rr}-\mathrm{r}^2+\\2(\mathrm{R}-2\mathrm{r}).\sqrt{\mathrm{R}^2-2\mathrm{Rr}}\end{pmatrix}$$

$$\overset{?}{\leq} 64R^3 + 32R^2r + 292Rr^2 - 9r^3$$

$$\Leftrightarrow 2(R-2r)(20R^2 - 25Rr - 3r^2) \overset{?}{\geq} 2(R-2r)(12R+21r).\sqrt{R^2-2Rr} \text{ and}$$

$$\because R - 2r \overset{Euler}{\geq} 0 \therefore \text{it suffices to prove :}$$

$$(20R^2 - 25Rr - 3r^2)^2 \overset{?}{>} (R^2 - 2Rr)(12R+21r)^2$$

$$\Leftrightarrow 256t^4 - 1216t^3 + 1072t^2 + 1032t + 9 \overset{?}{>} 0 \left(t = \frac{R}{r}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{27}\Big((768t^2 + 448t + 144)(3t-8)^2 + 6104t - 8973\Big) \overset{?}{>} 0 \to \text{true} \because t \overset{Euler}{\geq} 2$$

$$\Rightarrow (**) \Rightarrow (*) \text{ is true}$$

$$\therefore a^4b + b^4c + c^4a \leq (a^2+b^2+c^2)\big((a+b+c)(ab+bc+ca) - 8abc\big)$$

$$\forall a,b,c \geq 0, '' ='' \text{ iff } (a=b=0 \leq c) \text{ or } (b=c=0 \leq a) \text{ or } (c=a=0 \leq b)$$

$$\text{or } a=b=c>0 \text{ (QED)}$$