ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE

For $a, \mathrm{b}, \mathrm{t} \geq 0; (a+\mathrm{t})(\mathrm{b}+\mathrm{t}) > 0$ and $\mathrm{k} \geq 2$ prove that :

$$\frac{1}{a+\mathrm{t}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{t}} \geq \frac{4\mathrm{k}}{\mathrm{k}(\mathrm{k}+2\mathrm{t})+a\mathrm{b}}$$

Proposed by Dang Ngoc Minh-Vietnam

Solution by Soumava Chakraborty-Kolkata-India

$\boxed{\text{Case 1}}$ $\mathrm{t}=0$ (and definitely; $a, \mathrm{b}>0$) and then : $\frac{1}{a+\mathrm{t}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{t}} \geq \frac{4\mathrm{k}}{\mathrm{k}(\mathrm{k}+2\mathrm{t})+a\mathrm{b}} \Leftrightarrow \mathrm{k}^2(a+\mathrm{b})-4\mathrm{k}a\mathrm{b}+a\mathrm{b}(a+\mathrm{b}) \overset{(\bullet)}{\geq} 0$ and now, discriminant of LHS of $(\bullet) = 16a^2\mathrm{b}^2-4a\mathrm{b}(a+\mathrm{b})^2 = -4a\mathrm{b}(a-\mathrm{b})^2 \leq 0 \therefore$ LHS of $(\bullet) \geq 0$

$$\therefore \frac{1}{a+\mathrm{t}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{t}} \geq \frac{4\mathrm{k}}{\mathrm{k}(\mathrm{k}+2\mathrm{t})+a\mathrm{b}} \text{ if } \mathrm{t}=0\ (a, \mathrm{b}>0)$$

$\boxed{\text{Case 2}}$ $\mathrm{t} \neq 0$ and either a or $\mathrm{b}=0$ and WLOG assuming $a=0$ $(\mathrm{b} \neq 0)$, $\frac{1}{a+\mathrm{t}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{t}} \geq \frac{4\mathrm{k}}{\mathrm{k}(\mathrm{k}+2\mathrm{t})+a\mathrm{b}} \Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{t}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{t}} \geq \frac{4}{\mathrm{k}+2\mathrm{t}}$ $(\because \mathrm{k}>0) \Leftrightarrow \mathrm{bk}+2\mathrm{kt} \geq 2\mathrm{bt}$

$$\Leftrightarrow \mathrm{b}(\mathrm{k}-2\mathrm{t})+2\mathrm{kt} \geq 0 \rightarrow \text{true (strict)} \because \mathrm{b}, \mathrm{k}, \mathrm{t}>0 \text{ and } \mathrm{k} \geq 2\mathrm{t}$$

$$\therefore \frac{1}{a+\mathrm{t}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{t}} > \frac{4\mathrm{k}}{\mathrm{k}(\mathrm{k}+2\mathrm{t})+a\mathrm{b}} \text{ if } \mathrm{t} \neq 0 \text{ and either } a \text{ or } \mathrm{b}=0$$

$\boxed{\text{Case 3}}$ $\mathrm{t} \neq 0$ and $a=\mathrm{b}=0$ and then : $\frac{1}{a+\mathrm{t}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{t}} \geq \frac{4\mathrm{k}}{\mathrm{k}(\mathrm{k}+2\mathrm{t})+a\mathrm{b}}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\mathrm{t}} \geq \frac{4}{\mathrm{k}+2\mathrm{t}}\ (\because \mathrm{k} \geq 2\mathrm{t}>0 \Rightarrow k>0) \Leftrightarrow \mathrm{k} \geq 0 \rightarrow \text{true (strict)}$$

$$\therefore \frac{1}{a+\mathrm{t}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{t}} > \frac{4\mathrm{k}}{\mathrm{k}(\mathrm{k}+2\mathrm{t})+a\mathrm{b}} \text{ if } \mathrm{t} \neq 0 \text{ and } a=\mathrm{b}=0$$

$\boxed{\text{Case 4}}$ $\mathrm{t}, a, \mathrm{b} \neq 0\ \&\ \mathrm{t}^2 \leq a\mathrm{b}$; then we have : $\frac{1}{a+\mathrm{t}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{t}} \geq \frac{4\mathrm{k}}{\mathrm{k}(\mathrm{k}+2\mathrm{t})+a\mathrm{b}}$

$$\Leftrightarrow \frac{a+\mathrm{b}+2\mathrm{t}}{a\mathrm{b}+\mathrm{t}^2+\mathrm{t}(a+\mathrm{b})} \geq \frac{4\mathrm{k}}{\mathrm{k}(\mathrm{k}+2\mathrm{t})+a\mathrm{b}} \Leftrightarrow (\mathrm{k}^2+2\mathrm{kt})(a+\mathrm{b})+2\mathrm{k}^2\mathrm{t}+4\mathrm{kt}^2+a\mathrm{b}(a+\mathrm{b})+2\mathrm{t}a\mathrm{b} \geq 4\mathrm{k}a\mathrm{b}+4\mathrm{kt}^2+4\mathrm{kt}(a+\mathrm{b})$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{k}^2(a+\mathrm{b}+2\mathrm{t})-2\mathrm{k}(\mathrm{t}(a+\mathrm{b})+2a\mathrm{b})+a\mathrm{b}(a+\mathrm{b}+2\mathrm{t}) \overset{(*)}{\geq} 0$$

Now, discriminant of LHS of $(*) = 4((\mathrm{t}(a+\mathrm{b})+2a\mathrm{b})^2-a\mathrm{b}(a+\mathrm{b}+2\mathrm{t})^2)$

$$= 4\left(\mathrm{t}^2(a+\mathrm{b})^2+4a^2\mathrm{b}^2+4\mathrm{t}(a+\mathrm{b})-a\mathrm{b}(a+\mathrm{b})^2-4a\mathrm{b}\mathrm{t}^2-4\mathrm{t}(a+\mathrm{b})\right)$$

$$= 4(\mathrm{t}^2(a-\mathrm{b})^2-a\mathrm{b}(a-\mathrm{b})^2) = 4(\mathrm{t}^2-a\mathrm{b})(a-\mathrm{b})^2 \leq 0 \therefore \text{LHS of } (*) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+\mathrm{t}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{t}} \geq \frac{4\mathrm{k}}{\mathrm{k}(\mathrm{k}+2\mathrm{t})+a\mathrm{b}} \text{ if } \mathrm{t}, a, \mathrm{b} \neq 0\ \&\ \mathrm{t}^2 \leq a\mathrm{b}$$

$\boxed{\text{Case 5}}$ $\mathrm{t}, a, \mathrm{b} \neq 0$ and $\mathrm{t}^2 > a\mathrm{b}$ and then, via $(*)$, $\frac{1}{a+\mathrm{t}}+\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{t}} \geq \frac{4\mathrm{k}}{\mathrm{k}(\mathrm{k}+2\mathrm{t})+a\mathrm{b}}$

$$\Leftrightarrow \mathrm{k}^2(a+\mathrm{b}+2\mathrm{t})-2\mathrm{kt}(a+\mathrm{b})-4\mathrm{k}a\mathrm{b}+a\mathrm{b}(a+\mathrm{b}+2\mathrm{t}) \overset{(**)}{\geq} 0 \text{ and } \because a\mathrm{b}<\mathrm{t}^2$$

$$\therefore \text{LHS of } (*) > k^2(a+b+2t) - 2kt(a+b) - 4kt^2 + ab(a+b+2t)$$
$$= (k^2 - 2kt)(a+b) + 2kt(k-2t) + ab(a+b+2t)$$
$$= (a+b+2t)(k(k-2t)+ab) > 0 \because a, b, t > 0 \,\&\, k \geq 2t$$
$$\therefore \frac{1}{a+t} + \frac{1}{b+t} > \frac{4k}{k(k+2t)+ab} \text{ if } t, a, b \neq 0 \,\&\, t^2 > ab \text{ and so,}$$
$$\text{combining all cases}, \frac{1}{a+t} + \frac{1}{b+t} \geq \frac{4k}{k(k+2t)+ab}$$
$$\forall\, a, b, t \geq 0 \,\Big|\, (a+t)(b+t) > 0 \ \wedge\ k \geq 2t, '' ='' \text{ iff } a = b = k > 0 \text{ (QED)}$$