501

DANIEL SITARU - ROMANIA

501. Sea
$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$
Determinar todas las matrices $A \in \mathcal{M}$ tales que
$$A^4 + 4A^2 + I_2 = 3(A^3 + A)$$
donde I_2 denota la matriz identidad de orden dos.

Solución eviada, independientemente, por A. Arenas y Á. Sanz (estudiante), Universidad de la Rioja, Logrono; A. Elduque, Universidad de Zaragoza, Zaragoza; J. Duoandkoetxea, Vizcaya; M. I. Garrido, Universidad Complutense de Madrid, H. Ricardo, Westchester Area Math Circle, Purchase, NY, EE. UU.; y J. Vinuesa, Universidad de Canabria, Santander.

Puesto que $\mathcal{M}$ es isomorfo, como anillo, al cuerpo de los números coplejos $\mathbb{C}$ mediante la aplicación
$$a + ib \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
el problema se reduce a calcular las raíces complejas del polinomio
$$z^4 + 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = (z-1)^2(z^2 - z + 1).$$
Puesto que las raíces de este polinomio son $z = 1$ (doble) y $z = (1 \pm i\sqrt{3})/2$, las matrices solicitadas son la identidad I_2,
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$\square$

También resuelto por A. Arenas y Á. Sanz (una sequnda solución), B. Bradie, J. Duoandikoetxea (una segunda solución), M. Fernández, M. Á. Ingelmo, J. Polo, J. Rández, B. Salqueiro, A. Stadler, S.M. Stewart, D. Văcaru y el proponente. Se ha recibido una solución incopleta.

NOTA. En una parte importante de las soluciones recibidas para este problema se utiliza una gran variedad de argumontos algebraicos (estudio de determinantes, análisis del polinomio mínimo, etc.); otras, sin ebargo, optan por un argumento que podríamos denominar de "fuerza bruta": calcular las correspondientes potencias de la matriz A y reducir la resolución al estudio de un sistema no lineal en a y b.

Solution 2 by proposer.

Denote $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

We will prove that $(M, +, \cdot)$ is a commutative field and $(M, +, \cdot) \cong (\mathbb{C}, +, \cdot)$.
Let be $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, A, B \in M$.

$$A + B = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \in M \tag{1}$$

$$(A+B)+C = A+(B+C), \forall A, B, C \in M \tag{2}$$

$$A + B = B + A, \forall A, B \in M \tag{3}$$

$$A + O_2 = O_2 + A = A, \forall A \in M, O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{pmatrix} \in M \tag{4}$$

$$A + (-A) = (-A) + A = O_2, \forall A \in M, -A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -(-b) & -a \end{pmatrix} \in M \tag{5}$$

$$\text{By } (1), (2), (3), (4), (5) \Rightarrow (M, +) \text{ is an abelian group} \tag{7}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad+bc) & ac - bd \end{pmatrix} \in M \tag{8}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot c), \forall A, B, C \in M \tag{9}$$

$$A \cdot B = B \cdot A, \forall A, B \in M \tag{10}$$

$$A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A, \forall A \in M, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} \in M \tag{11}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \tag{12}$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \tag{13}$$

$$\text{By } (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13) \Rightarrow (M, +, \cdot) \text{ is a commutative ring} \tag{14}$$

$$A^{-1} \text{ exists if } \det A = a^2 + b^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ or } b \neq 0 \Leftrightarrow A \neq O_2$$

$$\text{If } A \in M - \{O_2\} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \in M \tag{15}$$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2, \forall A \in M - \{O_2\} \tag{16}$$

(17) $$O_2 \neq I_2$$

By $(14),(15),(16),(17) \Rightarrow (M,+,\cdot)$ is a commutative field.

Let be $f : M \to \mathbb{C}, f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = a+ib, i^2=-1.$

(18) Obviously f - bijectif

$$f(A+B) = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}\right) =$$
$$= a+c+i(b+d) = (a+ib)+(c+id) =$$
$$= f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right) = f(A)+f(B)$$

(19) $$f(A+B) = f(A)+f(B)$$

$$f(A\cdot B) = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}\right) =$$
$$= (ac-bd)+i(ad+bc) = (a+ib)\cdot(c+id) =$$
$$= f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) \cdot f\left(\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right) = f(A)\cdot f(B)$$

(20) $$f(A\cdot B) = f(A)\cdot f(B)$$

(21) By $(19),(20) \Rightarrow f$ - morphism

By $(18),(21) \Rightarrow f$ - isomorphism $\Rightarrow (M,+,\cdot) \cong (\mathbb{C},+,\cdot)$

Back to the problem:

$$A^4+4A^2+I_2 = 3A^3+3A \Rightarrow f(A^4+4A^2+I_2) = f(3A^3+3A) \overset{(19)}{\Rightarrow}$$
$$f(A^4)+f(4A^2)+f(I_2) = f(3A^3)+f(3A) \overset{(19)}{\Rightarrow}$$
$$f(A^4)+4f(A^2)+f(I_2) = 3f(A^3)+3f(A) \overset{(20)}{\Rightarrow}$$
$$(f(A))^4+4f(A))^2+1 = 3(f(A))^3+3f(A)$$
$$f(A) = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = a+ib \overset{\text{denote}}{=} z$$
$$z^4+4z^2+1 = 3z^3+3z \Rightarrow z^4-3z^3+4z^2-3z+1=0$$
$$z^2+\frac{1}{z^2}-3\left(z+\frac{1}{z}\right)+4=0$$
$$\text{Denote } z+\frac{1}{z} = u \Rightarrow z^2+\frac{1}{z^2} = u^2-2$$
$$u^2-2-3u+4=0 \Rightarrow u^2-3u+2=0 \Rightarrow u_1=1, u_2=2$$
$$z+\frac{1}{z} = 1 \Rightarrow z^2-z+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{z} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$z + \frac{1}{z} = 2 \Rightarrow z^2 - 2z + 1 = 0 \Rightarrow z = 1 + 0 \cdot i \Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solutions are A_1, A_2, A_3. $\square$

Mathematics Department, National Economic College "Theodor Costescu", Drobeta Turnu - Severin, Romania

Email address: dansitaru63@yahoo.com