493

DANIEL SITARU - ROMANIA

Sean x, y y z números reales positivos tales que $x+y+z=3$. Probar que:

$$e^3(e^{-2x}+e^{-2y}+e^{-2z})+3e \geq 2(e^x+e^y+e^z)$$

Daniel Sitaru - Romania

Solución 1 enviada por Miguel Ángel Ingelmo, I. E. S. José Saramago, Arganda Del Rey, Madrid.

Tomando unas nuevas variables α y β tales que

$$x=\beta+1+\alpha, \qquad y=\beta+1-\alpha \qquad \text{y} \qquad z=1-2\beta$$

para las que las restricciones $x, y, z > 0$ y $x+y+z=3$ implican $-1<\beta<\frac{1}{2}$ y $-\frac{3}{2}<\alpha<\frac{3}{2}$ (aunque esto último no será necesario en nuestra argumentación), la desigualdad a probar se convierte en

$$2e^{1-2\beta}(\cosh(2\alpha)-1)-4e^{1+\beta}\cosh\alpha+e^{1+4\beta}+3e \geq 0.$$

Ahora, aplicando la identidad $\cosh(2\alpha)=2\cosh^2\alpha-1$, llegamos a que debe verificarse que

$$4e^{1-2\beta}g(\alpha,\beta)\geq 0,$$

donde

$$g(\alpha,\beta)=\Big(\cosh\alpha-\frac{e^{3\beta}}{2}\Big)^2+\frac{3e^{2\beta}}{4}-1.$$

Si $\log(\frac{4}{3})\leq 2\beta<1$, es claro que $g(\alpha,\beta)>0$. Veamos que si $-2<2\beta<\log(\frac{4}{3})$ se cumple que $g(\alpha,\beta)\geq 0$. En el caso $\beta=0$, la desigualdad $g(\alpha,0)\geq 0$ se transforma en

$$\cosh\alpha(\cosh\alpha-1)\geq 0,$$

que es obviamente cierte ser $\cosh\alpha\geq 1$. Además, se tiene que $g(\alpha,0)=0$ si y solo si $\cosh\alpha=1$ es decir, $\alpha=0$ (lo que implica que para $x=y=z=1$ se alcanza la igualdad en la desigualdad propuesta). Supongamos ahora que $-2<2\beta<\log(\frac{4}{3}), \beta\neq 0$, buscando un absurdo, que $g(x,y)\leq 0$. En tal caso se cumpliría que

$$\cosh\alpha\leq\frac{e^{3\beta}}{2}+\sqrt{1-\frac{3e^{2\beta}}{4}} \tag{4}$$

Sin embargo, se tiene que

$$\frac{e^{3\beta}}{2}+\sqrt{1-\frac{3e^{2\beta}}{4}}<1,$$

ya que esta desigualdad es equivalente a

$$(e^\beta-1)^2(e^{2\beta}+2e^\beta+3)>0$$

y entonces (4) implicaría $\cosh\alpha<1$, lo que es absurdo. Por tanto en este caso $g(\alpha,\beta)>0$.

De este modo hemos probado, además, que la igualdad en la desigualdad propuesta se alcanza si y solo si $x = y = z = 1$. $\square$

Solution 2 by proposer.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; f(x)=e^x; f'(x)=e^x; f''(x)=e^x>0$$

f convexe. By Popoviciu's inequality:
(1)
$$f(p)+f(q)+f(r)+3f\left(\frac{p+q+r}{3}\right)\geq 2\left(f\left(\frac{p+q}{2}\right)+f\left(\frac{q+r}{2}\right)+f\left(\frac{r+p}{2}\right)\right);(\forall)p,q,r\in\mathbb{R}$$

We take:

$$p=-x+y+z; q=x-y+z; r=x+y-z \text{ in } (1):$$
$$f(-x+y+z)+f(x-y+z)+f(x+y-z)+$$
$$+3f\left(\frac{-x+y+z+x-y+z+x+y-z}{3}\right)\geq$$
$$\geq 2\left(f\left(\frac{2z}{2}\right)+f\left(\frac{2x}{2}\right)+f\left(\frac{2y}{2}\right)\right)$$
$$f(3-2x)+f(3-2y)+f(3-2z)+3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq$$
$$\geq 2(f(x)+f(y)+f(z))$$
$$e^{3-2x}+e^{3-2y}+e^{3-2z}+3f\left(\frac{3}{3}\right)\geq 2(e^x+e^y+e^z)$$
$$e^3\left(\frac{1}{e^{2x}}+\frac{1}{e^{2y}}+\frac{1}{e^{2z}}\right)+3e\geq 2(e^x+e^y+e^z)$$

Equality holds for $x = y = z = 1$. $\square$

Mathematics Department, National Economic College "Theodor Costescu", Drobeta Turnu - Severin, Romania
Email address: dansitaru63@yahoo.com