LA GACETA DE LA RSME CHALLENGES-(II)

DANIEL SITARU - ROMANIA

315. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, probar que

$$\frac{e^b - e^a}{b-a} \geq \frac{e^a}{24}(b-a)^2 + \sqrt{e^{a+b}}.$$

Propuesto por Daniel Sitaru - Rumanía

Solutión enviada por Kee – Wai Lau, Hong Kong, China.
Tomando la nueva variable positive $x = b - a$ y dividiendo a ambos lados la desigualdad propuesta por e^{-a}, esta resulta ser equivalente a

$$\frac{e^x - 1}{x} - \frac{x^2}{24} - e^{\frac{x}{2}} \geq 0. \tag{1}$$

Ahora, usando el desarrollo en serie de potencias de la function exponential,

$$\frac{e^x - 1}{x} - \frac{x^2}{24} - e^{\frac{x}{2}} = \sum_{n=3}^{\infty}\Big(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{2^n n!}\Big)x^n = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^n - n - 1}{2^n(n+1)!}x^n,$$

lo que implica (1) por ser $x > 0$ y complirse que $2^n - n - 1 > 0$ para cada $n \geq 3$.
Nota. La mayor parte de las soluciones reecibidas utilizan un argumento similar al de la publicada, y A. Plaza observa que dicho argumento puede utilizarse para probar la desigualdad mas general

$$\frac{e^b - e^a}{b-a} > \sum_{k=2}^{n}\frac{e^a(2^k - k - 1)}{2^k(k+1)!}(b-a)^k + \sqrt{e^{a+b}}, b > a.$$

$\square$

338. Sean m_a, m_b, m_c y a, b, c las longitudes de las medianas y los lados, respectivamente, de un triangulo ABC. Si S denota el doble del area de dicho triangulo probar que

$$\Big(\frac{m_a^2}{m_b^2} + \frac{m_b^2}{m_c^2} + \frac{m_c^2}{m_a^2}\Big)\Big(\frac{m_a^4}{m_b^4} + \frac{m_b^4}{m_c^4} + \frac{m_c^4}{m_a^4}\Big)\Big(\frac{m_a^8}{m_b^8} + \frac{m_b^8}{m_c^8} + \frac{m_c^8}{m_a^8}\Big) \geq$$

$$\geq S^3\Big(\frac{1}{am_b} + \frac{1}{bm_c} + \frac{1}{cm_a}\Big)^3$$

Propuesto por Daniel Sitaru - Rumanía

Solutión enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.
Para $n \geq 1$ procederemos a probar la cadena de desigualdades

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{m_a^{2^k}}{m_b^{2^k}} + \frac{m_b^{2^k}}{m_c^{2^k}} + \frac{m_c^{2^k}}{m_a^{2^k}}\right) \geq \Big(\frac{m_a}{m_b} + \frac{m_c}{m_c} + \frac{m_c}{m_a}\Big)^n \geq S^n\Big(\frac{1}{am_b} + \frac{1}{bm_c} + \frac{1}{cm_a}\Big)^n \tag{1}$$

donde las igualdades se cumplen si y solo si ABC es un triangulo equlatero.
La prueba de la primera desigualdad en (1) se deduce usando que

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geq\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x} \tag{2}$$

con igualdad si y solo si $x=y=z$, que es una snecilla aplicacion de la desigualdad entre las medias cuadratica y aritmetica y la de las medias aritmetica y geometrica. En efecto,

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geq\frac{1}{3}\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\Big)^2$$
$$\geq\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\Big)\sqrt[3]{\frac{x}{y}\frac{y}{z}\frac{z}{x}}=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}.$$

Veamos ahora, por induccion en k, que para cada entero $k\geq 1$ se cumple la desigualdad

$$\frac{m_a^{2^k}}{m_b^{2^k}}+\frac{m_b^{2k}}{m_c^{2k}}+\frac{m_c^{2^k}}{m_a^{2^k}}\geq\frac{m_a}{m_b}+\frac{m_b}{m_c}+\frac{m_c}{m_a} \tag{3}$$

con igualdad si y solo si ABC es un triangulo equilatero. El caso $k=1$ es evidente tomando $x=m_a, y=m_b$ y $z=m_c$ en (2). Ademas,en ese caso la igualdad se cumple si y solo si ABC es un triangulo equilatero. Supongamos que (3) se cumple para un cierto valor k y veamos que tambien severifica para $k+1$. Aplicando,sucesivamente, (2) con $x=m_a^{2^k}, y=m_b^{2^k}$ y $z=m_c^{2^k}$ y (3), tenemos que

$$\frac{m_a^{2^{k+1}}}{m_b^{2^{k+1}}}+\frac{m_b^{2^{k+1}}}{m_c^{2^{k+1}}}+\frac{m_c^{2^{k+1}}}{m_a^{2^{k+1}}}=\frac{(m_a^{2^k})^2}{(m_b^{2^k})^2}+\frac{(m_b^{2^k})^2}{(m_c^{2^k})^2}+\frac{(m_c^{2^k})^2}{(m_a^{2^k})^2}\geq$$
$$\geq\frac{m_a^{2^k}}{m_b^{2^k}}+\frac{m_b^{2^k}}{m_c^{2^k}}+\frac{m_c^{2^k}}{m_a^{2^k}}\geq\frac{m_a}{m_b}+\frac{m_b}{m_c}+\frac{m_c}{m_a},$$

donde la igualdad se alcanza si y solo si ABC es un triangulo equilatero. Esto concluye la prueba de (3). De este modo, la primera de las desigualdades de (1) se obtiene multiplicando las desigualdades en (3) para $k=1,\dots,n$.
Ahora, como $S=ah_a$, donde h_a es la altura de triangulo ABC desde el vertice A, y se cumple $h_a\leq m_a$, con igualdad si y solo si $b=c$, se tiene

$$\frac{S}{am_b}=\frac{h_a}{m_b}\leq\frac{m_a}{m_b}$$

y, por analogia,

$$S\Big(\frac{1}{am_b}+\frac{1}{bm_c}+\frac{1}{cm_a}\Big)\leq\frac{m_a}{m_b}+\frac{m_b}{m_c}+\frac{m_c}{m_a},$$

con igualdad si y solo si ABC es un triangulo equilatero, lo que prueba la segunda desigualdad de (1).
Es claro que la desigualdad propuesta se corresponde con el caso $n=3$ de (1). $\square$

357. Si a,b y c son numeros reales positivos y $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, probar que

$$\frac{a^2\sin^6 x}{x^6}+\frac{b^2\sin^4 x}{x^4}+\frac{c^2\sin^2 x}{x^2}+3\sqrt[3]{(abc)^2}\frac{\tan^2 x}{x^2}>6\sqrt[3]{(abc)^2}$$

Propuesto por D.M. Bătineţu-Giurgiu y Daniel Sitaru - Rumanía

Solutión enviada, independientemente, por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China. y Daniel Văcaru, Piteşti, Rumaía

Por la desigualdad entre la media aritmetica y la geometrica, temenos que

$$\frac{a^2 \sin^6 x}{x^6} + \frac{b^2 \sin^4 x}{x^4} + \frac{c^2 \sin^2 x}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}\frac{\sin^4 x}{x^4}$$

y, por tanto, probando que

$$\frac{\sin^4 x}{x^4} + \frac{\tan^2 x}{x^2} > 2, \qquad x \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \tag{1}$$

habremos concluido.

A partir de la conocidas desigualdades

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \qquad y \qquad \tan x > x + \frac{x^3}{3}, \qquad x \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big)$$

usando que

$$\Big(1 - \frac{x}{6}\Big)^4 + \Big(1 + \frac{x}{3}\Big)^2 = 2 + \frac{x^4((x-12)^2 + 216)}{1296},$$

podemos deducir (1). En efecto,

$$\frac{\sin^4 x}{x^4} + \frac{\tan^2 x}{x^2} > \Big(1 - \frac{x}{6}\Big)^4 + \Big(1 + \frac{x}{3}\Big)^2 > 2.$$

□

366. Si donotamos $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, probar que, para cada $a > 1$,

$$\frac{1}{H_n}\int_1^a \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + x^{2k}} dx < 1 - \frac{1}{a}.$$

Propuesto por Daniel Sitaru - Rumanía

Solutión enviada por Alberto Stadler, Herrliberg, Suiza.

En primer lugar debemos observer que $k + x^{2k} \geq kx^2$, para $k \geq 1$. En efecto, el caso $k = 1$ es obvio y si $k > 1$, usando la desigualdad entre la media aritmetica y la media geometrica, se tiene que

$$k + x^{2k} = (k-1)\frac{k}{k-1} + x^{2k} \geq k\sqrt[k]{\Big(\frac{k}{k-1}\Big)^{k-1} x^{2k}} > kx^2.$$

Por tanto,

$$\int_1^a \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + x^{2k}} dx < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\int_1^a \frac{dx}{x^2} = H_n\Big(1 - \frac{1}{a}\Big)$$

y la resultado se sigue de manera inmediata. □

381. Si $1 < a \leq b$, probar que

$$4\int_a^b \int_a^b (x^y + y^x) dx dy \geq (b-a)^2(4 + (b-a)^2).$$

Propuesto por Daniel Sitaru - Rumanía

Solutión enviada por Sean M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.
A partir de la desigualdad de Bernoulli

$$(1+t)^r \geq 1+rt, \qquad r,t \in \mathbb{R}, \qquad r \geq 1, t \geq -1,$$

tomando, respectivamente, $(t,r) = (x-1,y)$ y $(t,r) = (y-1,x)$, deducimos las desigualdades

$$x^y \geq 1+xy-y \qquad \text{y} \qquad y^x \geq 1+xy-x,$$

validas ambas para $x,y \geq 1$. Asi, puesto que $(x-1)(y-1) > 0$ cuando $x,y > 1$ llegamos a que

$$x^y + y^x \geq 1+xy+(x-1)(y-1) > 1+xy, \qquad x,y > 1,$$

y, por tanto,

$$\int_a^b \int_a^b (x^y+y^x)dxdy > \int_a^b \int_a^b (1+xy)dxdy = \frac{(b-a)^2}{4}(4+(b+a)^2).$$

Finalmente, la desigualdad propuesta se sigue inmediatamente usando que
$b+a > b-a$. □

396. Sean $x,y,zt \in (0,1)$ tales que $3\sqrt{3}(xyz+yzt+ztx+txy) = 4$. Probar que

$$\frac{yzt}{x(1-x^2)} + \frac{ztx}{y(1-y^2)} + \frac{txy}{z(1-z^2)} + \frac{xyz}{t(1-t^2)} \geq 2.$$

Propuesto por Daniel Sitaru - Rumanía

Solutión enviada por Daniel Văcaru, Piteşti, Rumanía.
Consideremos la function $f(x) = x(1-x^2)$ con $x \in (0,1)$. Como $f'(x) = 1-3x^2 = 0$ si y solo si $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, es claro que $f(x) \leq f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ para $x \in (0,1)$. Entonces $\frac{1}{x(1-x^2)} \geq \frac{9}{2\sqrt{3}}$ y, por tanto,

$$\frac{yzt}{x(1-x^2)} + \frac{ztx}{y(1-y^2)} + \frac{txy}{z(1-z^2)} + \frac{xyz}{t(1-t^2)} \geq \frac{9}{2\sqrt{3}}(xyz+yzt+ztx+txy) = 2,$$

donde en el último paso se ha usado la relación dada para los valores x,y,z y t. □

Mathematics Department, National Economic College "Theodor Costescu", Drobeta Turnu - Severin, Romania
Email address: dansitaru63@yahoo.com