R M M

ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE
www.ssmrmh.ro

If $a, b, c > 1$ then find:

$$\Omega = \lim_{x\to 0}\left(\log_a\left(\log_b\left(\log_c\left(c^b\cdot e^{-x}\right)\right)\right)\right)\left(\log_c\left(\log_b\left(\log_a\left(a^b\cdot e^{-x}\right)\right)\right)\right)^{-1}$$

Proposed by Daniel Sitaru-Romania
Solution 1 by Adrian Popa-Romania, Solution 2 by Florentin Vişescu-Romania

Solution 1 by Adrian Popa-Romania

$$\left(\log_a\left(\log_b\left(\log_c\left(c^b\cdot e^{-x}\right)\right)\right)\right)' = \frac{\log_b\left(\log_c\left(c^b\cdot e^{-x}\right)\right)'}{\log_b(\log_c(c^b\cdot e^{-x}))\cdot\log a} =$$

$$= \frac{\left(\log_c\left(c^b\cdot e^{-x}\right)\right)'}{\log_b(\log_c(c^b\cdot e^{-x}))\cdot\log_c(c^b\cdot e^{-x})\cdot\log a\log b} =$$

$$= \frac{-e^b e^{-x}}{\log_b(\log_c(c^b\cdot e^{-x}))\cdot\log_c(c^b\cdot e^{-x})\cdot c^b e^{-x}\log a\log b\log c} =$$

$$= \frac{-1}{\log_b(\log_c(c^b\cdot e^{-x}))\cdot\log_c(c^b\cdot e^{-x})\cdot\log a\log b\log c}$$

$$\left(\log_c\left(\log_b\left(\log_a\left(a^b\cdot e^{-x}\right)\right)\right)\right)' = \frac{\left(\log_b\left(\log_a\left(a^b\cdot e^{-x}\right)\right)\right)'}{\log_b(\log_a(a^b\cdot e^{-x}))\cdot\log c} =$$

$$= \frac{\left(\log_a\left(a^b\cdot e^{-x}\right)\right)'}{\log_b(\log_a(a^b\cdot e^{-x}))\cdot\log_a(a^b\cdot e^{-x})\log b\log c} =$$

$$=\frac{-a^be^{-x}}{\log_b(\log_a(a^b\cdot e^{-x}))\log_a(a^b\cdot e^{-x})\,a^be^{-x}\log a\log b\log c}=$$

$$=\frac{-1}{\log_b(\log_a(a^b\cdot e^{-x}))\log_a(a^b\cdot e^{-x})\log a\log b\log c}$$

$$\Omega=\lim_{x\to 0}\left(\log_a\left(\log_b\left(\log_c\left(c^b\cdot e^{-x}\right)\right)\right)\right)\left(\log_c\left(\log_b\left(\log_a\left(a^b\cdot e^{-x}\right)\right)\right)\right)^{-1}\overset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\log_b\left(\log_a\left(a^be^{-x}\right)\right)\cdot\log_a\left(a^be^{-x}\right)}{\log_b\left(\log_c\left(c^be^{-x}\right)\right)\cdot\log_c\left(c^be^{-x}\right)}=\frac{\log_b\left(\log_a\left(a^b\right)\right)\cdot\log_a\left(a^b\right)}{\log_b\left(\log_c\left(c^b\right)\right)\cdot\log_c\left(c^b\right)}=1$$

Solution 2 by Florentin Vişescu-Romania

$$\Omega=\lim_{x\to 0}\left(\log_a\left(\log_b\left(\log_c\left(c^b\cdot e^{-x}\right)\right)\right)\right)\left(\log_c\left(\log_b\left(\log_a\left(a^b\cdot e^{-x}\right)\right)\right)\right)^{-1}\overset{y=e^{-x}}{=}$$

$$=\lim_{y\to 1}\left(\log_a\left(\log_b\left(\log_c\left(c^b\cdot y\right)\right)\right)\right)\left(\log_c\left(\log_b\left(\log_a\left(a^b\cdot y\right)\right)\right)\right)^{-1}$$

$$\log_a\left(\log_b\left(\log_c\left(c^b\cdot y\right)\right)\right)=\log_a(\log_b(b+\log_c y))=$$

$$=\log_a\left(\log_b\left(b\left(1+\frac{\log_c y}{b}\right)\right)\right)=\log_a\left(1+\log_b\left(1+\frac{\log_c y}{b}\right)\right)$$

Similarly,

$$\log_c\left(\log_b\left(\log_a\left(a^b\cdot e^{-x}\right)\right)\right)=\log_c\left(1+\log_b\left(1+\frac{\log_a y}{b}\right)\right)$$

$$\Omega=\lim_{y\to 1}\frac{\log_a\left(1+\log_b\left(1+\frac{\log_c y}{b}\right)\right)}{\log_c\left(1+\log_b\left(1+\frac{\log_a y}{b}\right)\right)}=\lim_{y\to 1}\frac{\log c}{\log a}\cdot\frac{\log_b\left(1+\frac{\log_c y}{b}\right)}{\log_b\left(1+\frac{\log_a y}{b}\right)}=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{\log c}{\log a}\cdot\frac{\log_c y}{b}\cdot\frac{b}{\log_a y}=\lim_{y\to 1}\frac{\log c}{\log a}\cdot\frac{\log y}{\log c}\cdot\frac{\log a}{\log y}=1$$