# APPLICATIOINS DE LA FORMULE DE LEIBNIZ

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(f.g)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n-K}}{\partial x^{n-K}}(f).\frac{\partial^k}{\partial x^k}(g)$$

# DANS LA RESOLUTION DES QUELQUES INTEGRALES GENERALISEES

**Muhindo Vusangi Martin**

*vusangimartin@gmail.com*

Institut Supérieur pédagogique de kisangani (ISP/Kisangani)
B.P.508 Kisangani
Département de Mathématique
Boulevard du 30 Juin, Kisangani, R.D.Congo

Collège Maele
B.P.809 Kisangani
Section Scientifique
Boulevard Lumumba, Kisangani, R.D.Congo

**ABSTRACT**

**This formula helps us to find easily all integrals of forms**

$\int x^a e^{bx} cos^n cx dx$ **ou** $\int x^a e^{bx} sin^n cx dx$ **pour tous** $(a,b,c,n)\epsilon\mathbb{N}^4$

**It helps also to find the residue to a multiple pole of all product of a rational function and an usual function (exponential, logarithmic,…)**

$$\text{Res}(f(z),z_k)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_k}\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}[(z-z_k)^m f(z)]$$

# EPIGRAPHE

« La vie n'est bonne qu'à deux choses : découvrir les Mathématiques et enseigner les Mathématiques »

**S.D Poisson**

« La vie n'est bonne qu'à étudier et enseigner les Mathématiques »

**B. PASCAL**

# NOTATIONS

$\lfloor x \rfloor$: $partie\ entière\ du\ nombre\ x$

$(x, y)$: $la\ formule\ numéro\ y\ se\ trouvant\ sur\ la\ page\ x$

$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$

$\sum_{k=o}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} U_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} U_{2k+1}$ (5.0)

# INTRODUCTION

La résolution des certains intégrales généralisées a toujours causé un sérieux problème chez les élèves de l'école secondaire, les étudiants du supérieur, voir même chez certains enseignants des mathématiques et de physique.

Voici quelques intégrales généralisées qui constitueront la première partie de notre travail :

$$I = \int x^a e^{bx}\, dx$$

$$I = \int x^a \sin(bx) dx \quad et \quad I = \int x^a \cos(bx) dx$$

$$I = \int e^{ax} \sin(bx) dx \quad et \quad I = \int e^{ax} \cos(bx) dx$$

$$I = \int x^a e^{bx} \sin(cx) dx \quad et \quad I = \int x^a\, e^{bx} \cos(cx) dx$$

$$I = \int x^a ln^b\, x dx$$

Les résolutions de ces dernières nous conduiront à résoudre d'autres qui sont encore plus complexes comme par exemple :

$$I = \int P(x)\, e^{ax} sin^b (cx) dx$$

Avec $P(x)$ un polynôme

Pour résoudre facilement ces intégrales, nous allons utiliser la formule de LEIBNIZ de la dérivée $n^{ième}$ du produit de deux fonctions. Cette formule est donnée par :

Soit $f\ et\ g$ deux fonctions de variable $x$

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} . g^{(k)}$$

On peut encore la noter comme :

$$\frac{d^n}{dx^n}(f.g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(f) . \frac{d^k}{dx^k}(g)$$

Cette formule intervient aussi dans l'application du théorème de résidus dans la résolution de quelques intégrales réelles, cas de pole multiple d'ordre n.

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)f(z)]$$

On peu noter encore :

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)f(z)]^{(n-1)}$$

C'est ceux qui vont constituer la deuxième partie de notre travail.

Notre travail a pour but de développer l'esprit de recherche chez les jeunes passionnés de mathématiques dans le calcul intégral. Les lecteurs de notre travail peuvent utiliser les intégrales qui seront traitées dans la conception des petits logiciels de calcul.

Notre travail est subdivisé à deux trois chapitres qui sont :

- Formule de Leibniz
- Intégrales des quelques fonctions modulées
- Applications du théorème de résidus dans la résolution de quelques intégrales réelles.

# PLAN DU TRAVAIL

# CHAPITRE PREMIER : FORMULE DE LEIBNIZ

## 1.1 DERIVEE $n^{ième}$ D'UNE FONCTION

La dérivée d'ordre n (dérivée $n^{ième}$) d'une fonction $f(x)$ est notée

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \quad ou\ f^{(n)}(x)$$

Voici les dérivées d'ordre n de quelques fonctions usuelles et peut trouver facilement :

1. $\frac{d^n y}{dx^n}(x^a) = A_n^a x^{a-n} \quad avec\ a\epsilon\mathbb{N}\ et\ a < n$ (7.1)

2. $\frac{d^n y}{dx^n}(x^a) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-a+1+)} x^{a-n} \quad avec\ a\epsilon\mathbb{R}$ (7.2)

3. $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x+a}\right) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$ (7.3)

4. $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$ (7.4)

5. $\frac{d^n}{dx^n}(\sin ax) = a^n \sin\left(ax + \frac{\pi}{2}n\right)$ (7.5)

6. $\frac{d^n}{dx^n}(\cos ax) = a^n \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}n\right)$ (7.6)

Les deux dernières sont aussi appelées « **formules de Leibniz** »

7. $\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}) = a^n e^{ax}$ (7.7)

8. $\frac{d^n}{dx^n}(a^{bx}) = b^n a^x ln^n(x)$ (7.8)

## 1.2 DECOMPOSITION D'UNE FONCTION RATIONNELLE EN UNE SOMME DES FONCTIONS

### 1.2.1 THEOREME DE D'ALEMBERT-GAUSS

Tout polynôme

$$f(x) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

à n zéros $x_1, x_{2,}, \dots, x_n$ se factorise en :

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

Soit une fonction rationnelle

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ \ dans\ \mathbb{C}$$

Avec

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^n \ \ et\ g(x) = \sum_{j=1}^{m} b_jx^j$$

étant deux polynômes dans $\mathbb{C}$, on sait que $g(x)$ peut s'écrire comme

$$g(x) = b_m \prod_{j=1}^{m}\left(x - x_j\right)$$

Avec les $x_j$ les solutions de l'équation $g(x) = 0$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

**1è cas : $\boldsymbol{n} < m$**

On pose

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{b_n \prod_{j=1}^{m}(x-x_j)} = \frac{1}{b_m}\sum_{j=1}^{m}\frac{A_j}{(x-x_j)} \qquad (9.9)$$

Après avoir mis au même dénominateur. Ces derniers étant le même aux deux membres de l'égalité nous conduit à obtenir un système de n+1 équations à n+1 inconnues (les $A_j$) après l'identification.

**2è cas : $\boldsymbol{n \geq m}$**

On fait d'abord la division euclidienne avant de faire la même procédure que dans le cas précédent. En divisant $f(x)\ par\ g(x)$, on a :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

Avec $q(x)\ et\ g(x)$ respectivement le quotient et le reste.

La même procédure va s'appliquer à la fonction

$$k(x) = \frac{r(x)}{g(x)}$$

### 1.2.2 THEOREME

En prenant (7.3) et (9.9), on voit qu'on peut trouver facilement la dérivée nè de toute fonction rationnelle.

### 1.2.3 FORMULE DE LEIBNIZ

Les dérivées successives de $f.g$ sont :

$$(fg)^{(0)} = fg$$

$$(fg)^{(1)} = f^{(1)}g + fg^{(1)}$$

$$(fg)^{(2)} = \left[f^{(1)}g + fg^{(1)}\right]^{(1)}$$

$$= f^{(2)}g + 2f^{(1)} + fg^{(2)}$$

$$= \binom{2}{0} f^{(2-0)}g^{(0)} + \binom{2}{1} f^{(2-1)}g^{(1)} + \binom{2}{2} f^{(2-2)}$$

$$(fg)^{(3)} = \left[f^{(2)}g + 2f^{(1)}g^{(1)} + fg^{(2)}\right]^{(1)}$$

$$= f^{(3)}g + 3f^{(2)}g^{(1)} + 3f^{(1)}g^{(2)} + fg^{(3)}$$

$$= \binom{3}{0} f^{(3-0)}g^{(0)} + \binom{3}{1} f^{(3-1)}g^{(1)} + \binom{3}{2} f^{(3-2)}g^{(2)} + \binom{3}{3} f^{(3-3)}g^{(3)}$$

- 
- 
- 

On voit qu'il y'a une analogie entre cette formule et le binôme de Newton. La formule générale est donnée par :

$$\boldsymbol{(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f)^{(n-k)} g^{(k)}}$$

Elle peut se noter aussi :

$$\boldsymbol{\frac{d^n}{dx^n}(f.g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(f) \frac{d^k}{dx^k}(g)}$$

Avec

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Un coefficient binomial de Newton

# CHAPITRE DEUXIEME : INTEGRALES DE QUELQUES FONCTIONS MODULEES D'UNE FONCTION USUELLE

## $\mathbf{2.1.}\ \boldsymbol{I = \int x^a e^{bx}\, dx, (a, b \epsilon \mathbb{N})}$

$$I = \int x^a e^{bx} dx$$

$$I = \lim_{y \to b} \int x^a e^{yx} dx$$

$$I = \lim_{y \to b} \int \frac{\partial^a}{\partial y^a} e^{yx} dx$$

$$I = \lim_{y \to b} \frac{\partial^a}{\partial y^a} \int e^{yx} dx$$

$$I = \lim_{y \to b} \frac{\partial^a}{\partial y^a} \left( e^{yx} \frac{1}{y} \right)$$

On se trouve devant la dérivée d'ordre a d'un produit, donc on applique la formule de Leibniz

$$I = \lim_{y \to b} \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} \frac{\partial^{a-k}}{\partial y^{a-k}} (e^{xy}) \frac{\partial^k}{\partial y^k} \left( \frac{1}{y} \right)$$

En appliquant (7.3) et (7.7), on a :

$$I = \lim_{y \to b} \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^{a-k} e^{yx} . \frac{(-1)^k k!}{y^{k+1}}$$

$$I = \frac{e^{bx}}{b} \sum_{k=0}^{a} (-1)^k k! \binom{a}{k} \frac{x^{a-k}}{b^k}$$

On sait que

$$k!\binom{a}{k} = k!\frac{a!}{k!\,(a-k)!} = \frac{a!}{(a-k)!} = A_a^k$$

On a :

$$\boldsymbol{\int x^a e^{bx} dx = \frac{e^{bx}}{b}\sum_{k=0}^{a}(-1)^k A_a^k \frac{x^{a-k}}{b^k} + C}$$

On peut trouver aussi :

$$\boldsymbol{\int x^a c^{bx} dx = \int x^a e^{xb\ln c} dx}$$
$$\boldsymbol{= \frac{e^{xb\ln c}}{b\ln c}\sum_{k=0}^{a}(-1)^k A_a^k \frac{x^{a-k}}{(b\ln c)^k} = \frac{c^{bx}}{b\ln c}\sum_{k=0}^{a}(-1)^k A_a^k \frac{x^{a-k}}{(b\ln c)^k}}$$

On voit que ça devient facile de traiter les intégrales des polynômes modulés de $e^{bx}$ et de $c^x$ :

$$\boldsymbol{\int \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i\right) e^{bx} dx = \sum_{i=0}^{n} a_i \int x^i e^{bx} dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i e^{bx}}{b}\sum_{k=0}^{a_i}(-1)^k A_{a_i}^k \frac{x^{a_i-k}}{b^k}}$$

Et

$$\boldsymbol{\int \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i\right) c^{bx} dx = \sum_{i=0}^{n} a_i \int x^i c^{bx} dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i c^{bx}}{b\ln c}\sum_{k=0}^{a_i}(-1)^k A_{a_i}^k \frac{x^{a_i-k}}{(b\ln c)^k}}$$

**Remarques** :

- nous vous conseillerons d'utiliser la même procédure dans la résolution des autres intégrales semblables.
- On peut aussi démontrer la transformation de Laplace de $x^n$ en utilisant la formule de Leibniz :

$$\mathcal{L}(x^n)(p) = \int_0^{\infty} x^n e^{-px} dx$$

$$= (-1)^n \int_0^{\infty} (-x)^n e^{-px} dx$$

$$= (-1)^n \lim_{y \to p} \int_0^{\infty} (-x)^n e^{-yx} dx$$

$$= (-1)^n \lim_{y \to p} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \int_0^{\infty} e^{-yx} dx$$

$$= (-1)^n \lim_{y \to p} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left[ -\frac{e^{-yx}}{y} \right]_0^{\infty}$$

$$= (-1)^n \lim_{y \to p} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left( \frac{1}{y} \right)$$

En utilisant (7.3), on a :

$$= (-1)^n \lim_{y \to p} \frac{(-1)^n n!}{y^{n+1}}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}(x^n)(p) = \int_0^{\infty} x^n e^{-px} dx = \frac{n!}{p^{n+1}}}$$

- Si nous procédons de la même manière pour $p = 1$, nous obtiendrons la fonction gamma $\Gamma$ d'Euler pour les n entiers naturels non nuls :

$$\boldsymbol{\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \mathcal{L}(x^{n-1})(1) = (n-1)!}$$

## $\boldsymbol{2.2. \; I_1 = \int e^{ax} \sin(bx) dx \quad et \quad I_2 = \int e^{ax} \cos(bx) dx}$

Ici on ne va pas utiliser la formule de Leibniz

$$I_1 + iI_2 = \int e^{ax} e^{ibx} dx$$

$$= \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$$

$$= \frac{e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)(a - ib)}{(a+ib)(a-ib)}$$

$$I_1 + iI_2 = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + i \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(-b \cos bx + a \sin x)$$

a:

$$\boldsymbol{\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C}$$

Et

$$\boldsymbol{\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(-b \cos bx + a \sin x) + C}$$

## $\boldsymbol{2.3. I_1 = \int x^a \sin(bx) dx \quad et \quad I_2 = \int x^a \cos(bx) dx}$

$$I_1 + iI_2 = \int x^a e^{ibx} dx$$

En utilisant la première intégrale, on a:

$$= \frac{e^{ibx}}{ib} \sum_{k=0}^{a} (-1)^k A_n^k \frac{x^{a-k}}{(ib)^k}$$

$$= \frac{-i \cos bx + \sin x}{b} \sum_{k=0}^{a} (-1)^k i^{-k} A_n^k \frac{x^{a-k}}{b^k}$$

En utilisant  la formule (5.0), on a :

$$= \frac{\sin bx - i\cos bx}{b}\left[\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor}(-1)^k A_n^{2k}\frac{x^{a-2k}}{b^{2k}} + i\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{a-1}{2}\right\rfloor}(-1)^k A_n^{2k+1}\frac{x^{a-2k-1}}{b^{2k+1}}\right]$$

Ce qui nous donne :

$$\boldsymbol{\int x^a \cos bxdx = \frac{\sin bx}{b}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor}(-1)^k A_n^{2k}\frac{x^{a-2k}}{b^{2k}} + \frac{\cos bx}{b}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{a-1}{2}\right\rfloor}(-1)^k A_n^{2k+1}\frac{x^{a-2k-1}}{b^{2k+1}} + C}$$

Et

$$\boldsymbol{\int x^a \sin bxdx = \frac{\sin bx}{b}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{a-1}{2}\right\rfloor}(-1)^k A_n^{2k+1}\frac{x^{a-2k-1}}{b^{2k+1}} - \frac{\cos bx}{b}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor}(-1)^k A_n^{2k}\frac{x^{a-2k}}{b^{2k}} + C}$$

Ou encore

$$\int x^a \cos bxdx = \lim_{y\to b}\int x^a \cos yxdx$$

$$= \lim_{y\to b}\int x^a \cos\left(yx + \frac{a\pi}{2} - \frac{a\pi}{2}\right)dx$$

$$= \lim_{y\to b}\left[\int x^a \cos\left(yx + \frac{a\pi}{2}\right)\cos\frac{a\pi}{2}dx + \int x^a \sin\left(yx + \frac{a\pi}{2}\right)\sin\frac{a\pi}{2}dx\right]$$

En appliquant la formule (7.5) et (7.6)

$$= \lim_{y\to b}\left(\cos\frac{a\pi}{2}\frac{\partial^a}{\partial y^a}\int \cos yxdx + \sin\frac{a\pi}{2}\frac{\partial^a}{\partial y^a}\int \sin yxdx\right)$$

$$= \lim_{y\to b}\left[\cos\frac{a\pi}{2}\frac{\partial^a}{\partial y^a}\left(\frac{1}{y}\sin xy\right) - \sin\frac{a\pi}{2}\frac{\partial^a}{\partial y^a}\left(\frac{1}{y}\cos xy\right)\right]$$

En utilisant la formule de Leibniz, on a :

$$= \lim_{y \to b} \left[ \cos \frac{a\pi}{2} \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} \frac{\partial^{a-k}}{\partial y^{a-k}} (\sin yx) \frac{\partial^k}{\partial y^k} \left(\frac{1}{y}\right) - \sin \frac{a\pi}{2} \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} \frac{\partial^{a-k}}{\partial y^{a-k}} \left(\frac{1}{y}\right) \frac{\partial^k}{\partial y^k} (\cos yx) \right]$$

En utilisant (5.2), (5.3) et (5.4), on a :

$$= \lim_{y \to b} \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} \frac{(-1)^k k!}{y^{k+1}} x^{a-k} \left[ \cos \frac{a\pi}{2} \sin \left( yx + \frac{a\pi}{2} - \frac{k\pi}{2} \right) - \sin \frac{a\pi}{2} \cos \left( yx + \frac{a\pi}{2} - \frac{k\pi}{2} \right) \right]$$

On se retrouve devant la sinus de la différence de deux angles :

$$= \lim_{y \to b} \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} \frac{(-1)^k k!}{y^{k+1}} x^{a-k} \sin \left( yx - \frac{k\pi}{2} \right)$$

$$\boldsymbol{\int x^a \cos bx \, dx = \frac{\sin bx}{b} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A_a^k \frac{x^{a-k}}{b^k} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{\cos}{b} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A_a^k \frac{x^{a-k}}{b^k} \sin \frac{k\pi}{2} + C}$$

En utilisant cette formule, on retrouve la première forme :

$$\sum_{k=o}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} U_{2k} + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} U_{2k+1}$$

Et sachant que

$$\sin \left( \frac{2k\pi}{2} \right) = \sin k\pi = 0 \quad et \quad \cos \left( \frac{2k\pi}{2} \right) = \cos k\pi = (-1)^k$$

Et

$$\sin \left( \frac{2k\pi + \pi}{2} \right) = \sin \left( k\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \cos k\pi = (-1)^k$$

$$\cos \left( \frac{2k\pi + \pi}{2} \right) = \cos \left( k\pi + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin k\pi = 0$$

## 2.5. $I_1 = \int x^a e^{bx} \cos cx \, dx$ et $I_2 = \int x^a e^{bx} \sin cx \, dx$ $(a, b, c \in \mathbb{N})$

On sait que

$$\cos(cx) + i\sin(cx) = e^{icx}$$

$$=> \ I_1 + iI_2 = \int x^a e^{bx}[\cos(cx) + i\sin(cx)]dx$$

$$I_1 + iI_2 = \int x^a e^{bx} e^{icx} dx$$

$$I_1 + iI_2 = \int x^a e^{(b+ic)x} dx$$

En utilisant première intégrale, on a :

$$I_1 + iI_2 = \frac{e^{(b+ic)x}}{(b+ic)} \sum_{k=0}^{a} (-1)^k A_a^k \frac{x^{a-k}}{(b+ic)^k}$$

$$I_1 + iI_2 = \frac{e^{(b+ic)x}(b-ic)}{(b+ic)(b-ic)} \sum_{k=0}^{a} (-1)^k A_a^k \frac{x^{a-k}(b-ic)^k}{(b+ic)^k(b-ic)^k}$$

$$I_1 + I_2 = \frac{e^{bx}(\cos cx + i\sin cx)}{a^2 + b^2} \sum_{k=0}^{a} (-1)^k A_a^k \frac{x^{a-k}(b-ic)^{k+1}}{(a^2+b^2)^k}$$

En utilisant le binôme de Newton pour $(b - ic)^{k+1}$, on a :

$$I_1 + I_2 = \frac{e^{bx}(\cos cx + i\sin cx)}{a^2 + b^2} \sum_{k=0}^{a} (-1)^k A_a^k \frac{x^{a-k}}{(a^2+b^2)^k} \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} b^{k-p+1}(-ic)^p$$

En utilisant (5.0), on a :

$$I_1 + I_2 = \frac{e^{bx}(\cos cx + i\sin cx)}{a^2+b^2}\sum_{k=0}^{a}(-1)^k A_a^k \frac{x^{a-k}}{(a^2+b^2)^k}\left[\sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}(-1)^p\binom{k+1}{2p}b^{k-2p+1}c^{2p} + i\sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}(-1)^p\binom{k+1}{2p+1}b^{k-2p}c^{2p+1}\right]$$

$$I_1 + I_2 = \frac{e^{bx}}{a^2+b^2}\sum_{k=0}^{a}(-1)^k A_a^k \frac{x^{a-k}}{(a^2+b^2)^k}\left[\sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}(-1)^p\cos(cx)\binom{k+1}{2p}b^{k-2p+1} - \sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}(-1)^p\sin(cx)\binom{k+1}{2p+1}b^{-2p}c^{2p+1}\right]$$

$$+i\left[\sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}\cos(cx)\binom{k+1}{2p+1}b^{k-2p}c^{2p+1} + \sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}\sin(cx)\binom{k+1}{2p+1}b^{k-2p}c^{2p+1}\right]$$

$$\int x^a e^{bx}\cos cx\,dxv$$

$$\boldsymbol{= \frac{e^{bx}}{a^2+b^2}\sum_{k=0}^{a}(-1)^k A_a^k \frac{x^{a-k}}{(a^2+b^2)^k}\left[\sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}(-1)^p\cos(cx)\binom{k+1}{2p}b^{k-2p+1}c^{2p} - \sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}(-1)^p\sin(cx)\binom{k+1}{2p+1}b^{-2p}c^{2p+1}\right] + C}$$

Et

$$\boldsymbol{\int x^a e^{bx}\sin cx\,dx}$$

$$\boldsymbol{= \frac{e^{bx}}{a^2+b^2}\sum_{k=0}^{a}(-1)^k A_a^k \frac{x^{a-k}}{(a^2+b^2)^k}\left[\sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}(-1)^p\cos(cx)\binom{k+1}{2p+1}b^{k-2p}c^{2p+1} + \sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}(-1)^p\sin(cx)\binom{k+1}{2p+1}b^{k-2p}c^{2p+1}\right] + C}$$

0n voit qu'on peut facilement trouver les valeurs des intégrales suivantes (d∈ ℕ ):

$$\int x^a d^{bx} \cos cxdx = \int x^a e^{xb\ln d} \cos cxdx$$

Et

$$\int x^a d^{bx} \sin cx\, dx = \int x^a e^{xb\ln d} \sin cxdx$$

**Transformations de Laplace des fonctions trigonométriques (sinus et cosinus) modulées de la fonction puissance**

Ici nous allons utiliser l'autre méthode

$$\mathcal{L}\left(x^a e^{ibx}\right)(p) = \mathcal{L}(x^a \cos bx)(p) + i\mathcal{L}(x^a \sin bx)$$

$$\int_0^\infty x^a e^{ibx} e^{-px} dx = \int_0^\infty x^a e^{-(p-b)x} dx$$

$$= \lim_{y\to-(p-b)} \int_0^\infty x^a e^{-yx} dx$$

On procède comme on a fait pour trouver la première int »grale

$$= \lim_{y\to-(p-ib)} (-1)^a \frac{\partial^a}{\partial y^a} \int_0^\infty e^{-yx} dx$$

$$= \lim_{y\to-(p-ib)} (-1)^a \frac{\partial^a}{\partial y^a} \left[-\frac{e^{-yx}}{y}\right]_0^\infty$$

$$= \lim_{y\to-(p-ib)} (-1)^a \frac{\partial^a}{\partial y^a} \left(\frac{1}{y}\right)$$

On utilise la formule (7.3)

$$= \lim_{y \to -(p-ib)} (-1)^a \frac{(-1)^a a!}{y^{a+1}}$$

$$= \frac{a!}{(p-ib)^{a+1}}$$

$$= \frac{a!\,(p+ib)^{a+1}}{(p-ib)^{a+1}(p+ib)^{a+1}}$$

$$= \frac{a!}{(p^2+b^2)^{a+1}} \sum_{k=0}^{a+1} \binom{a+1}{k} p^{a-k+1}(ib)^k$$

En sachant que :

$$\mathcal{L}\left(x^a e^{ibx}\right)(p) = \mathcal{L}(x^a \cos bx)(p) + i\mathcal{L}(x^a \sin bx)(p)$$

Et en utilisant (5.0) ; on a :

$$= \frac{a!}{(p^2+b^2)^{a+1}} \left[ \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor} (-1)^k \binom{a+1}{2k} p^{a-2k+1} b^{2k} + i \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor} (-1)^k \binom{a+1}{2k+1} p^{a-2k} b^{2k+1} \right]$$

$$\boldsymbol{\int_0^{\infty} x^a e^{-px} \cos bx dx = \frac{a!}{(p^2+b^2)^{a+1}} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor} \left[ (-1)^k \binom{a+1}{2k} p^{a-2k+1} b^{2k} \right] + C}$$

**Et**

$$\boldsymbol{\int_0^{\infty} x^a e^{-px} \sin bx dx = \frac{a!}{(p^2+b^2)^{a+1}} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor} \left[ (-1)^k \binom{a+1}{2k+1} p^{a-2k} b^{2k+1} \right] + C}$$

On voit qu'on peut trouver encore pour les formes plus généralisées :

$$\int \boldsymbol{P(x)e^{bx}\sin^n cx\,dx}, \int \boldsymbol{P(x)e^{bx}\cos^n cx\,dx}, \int \boldsymbol{P(x)d^{bx}\sin^n cx\,dx}, \int \boldsymbol{P(x)d^{bx}\cos^n cx\,dx}$$

Il suffit seulement de linéariser $sin^n x\ et\ cos^n x$ en utilisant les formules d'Euler, retrouver une sommes des formes précédentes :

$$cos^n x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n$$

En utilisant le binôme de Newton, on a :

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{i(n-2k)x}$$

En prenant la partie réelle de $e^{i(n-2k)x}$ on a :

$$\boldsymbol{cos^n x = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(n-2k)\,x}$$

Et

$$sin^n x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n$$

$$= \frac{i^{-n}}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}[\cos(n-2k)x + i\sin(n-2k)]$$

Pour les n pairs, on o :

$$\boldsymbol{sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cos(n-2k)\,x}$$

Pour les n impairs, on a :

$$\boldsymbol{sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \sin(n-2k)x}$$

**<u>Remarques</u>**

**On constate que toutes les formes citées ci haut sont les cas particuliers de cette dernière.**

## $\boldsymbol{2.5. I = \int x^a ln^b\, xdx}$

$$I = \lim_{y\to a}\int x^y ln^b x dx$$

$$I = \lim_{y\to a}\frac{\partial^b}{\partial y^b}\int x^y dx$$

$$I = \lim_{y\to a}\frac{\partial^b}{\partial y^b}\left(\frac{1}{y+1}x^{y+1}\right)$$

En utilisant la formule de Leibniz

$$I = \lim_{y\to a} x\sum_{k=0}^{b}\binom{b}{k}\frac{\partial^{b-k}}{\partial y^{b-k}}(x^y)\frac{\partial^k}{\partial y^k}\left(\frac{1}{y+1}\right)$$

$$I = \lim_{y\to a} x\sum_{k=0}^{b}\binom{b}{k}(x^y)ln^{b-k}x\frac{(-1)^k k!}{(y+1)^{k+1}}$$

$$I = \lim_{y\to a}\frac{x^{y+1}}{y+1}\sum_{k=0}^{b}(-1)^k k!\binom{b}{k}\frac{ln^{b-k}x}{(y+1)^k}$$

$$\int \boldsymbol{x^a ln^b x dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} \sum_{k=0}^{b} (-1)^k A_b^k \frac{ln^{b-k} x}{(b+1)^k} + C}$$

On peut aussi facilement calculer

$$\int P(x) ln^b x dx$$

Avec $P(x)$ un polynôme

# CHAPITRE TROISIEME : APPLICATIONS DU THEOREME DE RESIDUS DANS LA RESOLUTION DES QUELQUES INTEGRALES REELLES

## 3.1 POLES ET ZEROS D'UNE FONCTION RATIONNELLE

Soit une fonction $f(z)$ définie sur $\mathbb{C}$ (ensemble des complexes)

Si

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

Alors $\forall z_k \in \mathbb{C}/h(z) = 0$, $z_k$ est appelé zéro de $f(z)$ et $\forall z_k \in \mathbb{C}/g(z) = 0$, $z_k$ est appelé pôle de $f(z)$

$z_k$ est un pôle simple de $f(z)$ si il est une racine simple de $g(z)$ et il est un pôle multiple d'ordre n si il est racine multiple d'ordre n.

## 3.2. RESIDUS D'UNE FONCTION ET THEOREME

### A. DEFI NITION

- **Pôles simples**

Si la fonction $f(z)$ admet un pôle simple au point $z_0$ alors

$$\text{Res}(f(z), z_k) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Si la fonction $f(z) = \frac{g(z)}{q(z)}$ admet un pôle au point $z_0$, avec $p(z) \neq 0$ alors

$$\text{Res}(f(z), z_k) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

- **Pole d'ordre m**

Si la fonction $f(z)$ admet un pôle d'ordre m au point $z_0$ alors

$$\mathrm{Res}(z_k, f(z)) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}$$

Avec $[h]^{(n)}$ est la dérivée d'ordre n de la fonction h

**B. THEOREME**

Si $f(z)$ est une fonction holomorphe sur un domaine D de frontière C fermée ( D entouré par C) et $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n \in C$ des points isolés de $f(z)$ alors l'intégrale de la fonction $f(z)$

sur C orientée positivement D est

$$\oint_C \boldsymbol{f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z), z_k)}$$

## 3.3. APPLICATIONS DU THEOREME DE RESIDUS

Ce théorème est appliqué dans la résolution des intégrales de la forme :

$$I = \int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta) d\theta$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

$$I = \int_{+\infty}^{-\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx$$

$$I = \int_0^{\infty} x^a f(x) dx$$

$$I = \int_0^{\infty} \ln x \, f(x)$$

Ce qui concerne ici c'est la recherche de résidus aux pôles multiples d'une fonction rationnelle$f(x)$.

Dans le premier chapitre on a vu qu'on peut décomposer tout polynôme $g(x)$ en facteur.

Or la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

Les pôles d'une fonction étant les zéros du dénominateur$g(x)$.

Donc on peut trouver tous les pôles d'une fonction rationnelle $f(x)$

En connaissant les pôles, la dérivée n$^{\text{ième}}$ d'une fonction et la formule de Leibniz, on peut facilement trouver le résidu d'ordre n d'une fonction rationnelle modulée d'une fonction puissance, exponentielle, trigonométrique, logarithmique,…

**Remarque** : les différentes conditions que $f(x)$ et ses pôles doivent satisfaire sont dans les livres d'analyse complexe

## 3.4. EXEMPLES

### Exemple 1

$$1;\ I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b\sin\theta)^n} \qquad 0 < b < a$$

En posant

$$e^{\theta} = z \quad => \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

On a:

$$I = \oint \frac{1}{zi} \frac{1}{\left[a + \frac{b}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^n} dz$$

On a:

$$f(z) = \frac{1}{zi} \frac{1}{\left[a + \frac{b}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^n}$$

$$f(z) = \frac{2^n i^{n-1} z^{n-1}}{(bz^2 + 2aiz - b)^n}$$

f(z) admet deux pôles d'ordre n qui sont :

$$z_1 = \frac{i\left(-a+\sqrt{a^2-b^2}\right)}{b} \quad et \quad z_2 = \frac{i\left(-a-\sqrt{a^2-b^2}\right)}{b}$$

Seul $z_1$ se trouve l'intérieur du cercle unité :

$$\operatorname{Res}(f,z_1) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_1}\frac{2^n i^{n-1}}{b^n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left[\frac{z^{n-1}}{(z+z_1)^n}\right]$$

$$\operatorname{Res}(f,z_1) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_1}\frac{2^n i^{n-1}}{b^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(-1)^{1-n}}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-k-1}}{\partial z^{n-k-1}}\left[\frac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{(z+z_1)^n}\right]\frac{\partial^k}{\partial z^k}(z^{n-1})$$

$$\operatorname{Res}(f,z_1) = \frac{(-1)^{n+1}}{[(n-1)!]^2}\frac{2^n i^{n-1}}{b^n}\lim_{z\to z_1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{\partial^{n-k-1}}{\partial z^{n-k-1}}\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left(\frac{1}{z-z_1}\right)\right]\frac{\partial^k}{\partial z^k}(z^{n-1})$$

$$\operatorname{Res}(f,z_1) = \frac{(-1)^{n+1}}{[(n-1)!]^2}\frac{2^n i^{n-1}}{b^n}\lim_{z\to z_1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{\partial^{2n-k-2}}{\partial z^{2n-k-2}}\left(\frac{1}{z-z_1}\right)\frac{\partial^k}{\partial z^k}(z^{n-1})$$

En appliquant la formule (5.1), on a :

$$\operatorname{Res}(f,z_1) = \frac{(-1)^{n+1}}{[(n-1)!]^2}\frac{2^n i^{n-1}}{b^n}\lim_{z\to z_1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(-1)^{2n-k-2}(2n-k-2)!}{(z-z_2)^{2n-k-1}}A_{n-1}^k z^{n-k-1}$$

$$\mathrm{res}(f, z_1) = \frac{(-1)^{n+1}}{[(n-1)!]^2} \frac{2^n i^{n-1}}{b^n} \lim_{z \to z_1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^{2n-k-2}(2n-k-2)!}{(z-z_2)^{2n-k-1}} A_{n-1}^k z^{n-k-1}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{[(n-1)!]^2} \frac{2^n i^{n-1}}{b^n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} A_{n-1}^k \frac{\left(\frac{-ia+i\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)^{n-k-1}}{\left(\frac{2i\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)^{2n-k-1}} (2n-k-2)!$$

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{(-1)^{n+1} i^{-n+n-1} 2^n}{[(n-1)!]^2} \frac{\left(-a+\sqrt{a^2-b^2}\right)^n}{2^{2n}\left(a^2-b^2\right)^n}$$

$$\left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (2n-k-2)! \binom{n-1}{k} A_{n-1}^k \left(\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{-a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)^{k+1}\right]$$

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_1)$$

$$\boldsymbol{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\sin\theta)^n} = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{[(n-1)!]^2} \left[\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{2(a^2-b^2)}\right]^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (2n-k-2)! \binom{n-1}{k} A_{n-1}^k \left(\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{-a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)^{k+1}}$$

**Exemple 2**

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \qquad b^2-4ac<0 : \ a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$f(z) = \frac{1}{(az^2 + bz + c)^n}$$

$f(z)$ admet pôles d'ordre n qui sont :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad et \;\; z_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

s

On prendra $z$ seulement car $Imz_2 < 0$

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z} \frac{1}{a^n} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} [(z - z_1)^n f(z)]$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{a^n} \lim_{z \to z_1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left[\frac{1}{(z - z_2)^n}\right]$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{(-1)^{-n+1}}{[(n-1)!]^2} \frac{1}{a^n} \lim_{z \to z_1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left(\frac{1}{z - z_2}\right)\right]$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{(-1)^{-n+1}}{[(n-1)!]^2} \frac{1}{a^n} \lim_{z \to z_1} \frac{\partial^{2n-2}}{\partial z^{2n-2}} \left(\frac{1}{z - z_2}\right)$$

En appliquant la formule (5.1), on a :

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{(-1)^{-n+1}}{[(n-1)!]^2} \frac{1}{a^n} \lim_{z \to z_1} \frac{(-1)^{2n-2}(2n-2)!}{(z - z_2)^{2n-1}}$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{(-1)^{-n+1}}{[(n-1)!]^2} \frac{1}{a^n} \frac{(2n-2)!}{\left(\frac{2i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^{2n-1}}$$

$$I = \frac{[2(n-1)]!}{[(n-1)!]^2} \frac{1}{a^{n-2n+1}} \frac{(-1)^{n+1} i^{-2n+1}}{\left(2\sqrt{4ac - b^2}\right)^{2n-1}}$$

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = 2\pi \binom{2n-2}{n-1} \frac{a^{n-1}}{\left(\sqrt{4ac-b^2}\right)^{2n-1}}}$$

**Exemple 3**

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^n} dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^n} dx$$

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{aix}}{(x^2+b^2)^n} dx\right]$$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+b^2)^n}$$

Les deux pôles d'ordre n de $f(x)$ sont $ib\ et -ib$, nous prenons seulement $ib\ \ car\ \ b > 0$

$$\mathrm{Res}\left[e^{aix}f(z), ib\right] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to ib} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left[(z-ib)^n e^{aix} f(z)\right]$$

$$\mathrm{Res}\left[e^{aix}f(z), ib\right] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to ib} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left[\frac{e^{aix}}{(z+ib)^n}\right]$$

On applique la formule de Leibniz

$$\mathrm{Res}\left[e^{aix}f(z), ib\right] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to ib} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{\partial^{n-k-1}}{\partial z^{n-k-1}}\left(e^{aiz}\right)\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left(\frac{1}{(z+ib)^n}\right)$$

$$\mathrm{Res}\left[e^{aix}f(z), ib\right] = \frac{(-1)^{n-1}}{[(n-1)!]^2}\lim_{z\to ib} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{\partial^{n-k-1}}{\partial z^{n-k-1}}\left(e^{aix}\right)\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left(\frac{1}{z+ib}\right)\right]$$

$$\operatorname{Res}\left[e^{aix}f(z),ib\right]=\frac{(-1)^{n-1}}{[(n-1)!]^2}\lim_{z\to ib}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{\partial^{n-k-1}}{\partial z^{n-k-1}}\left(e^{aix}\right)\frac{\partial^{n+k-1}}{\partial z^{n+k-1}}\left(\frac{1}{z+ib}\right)$$

En utilisant les formules (5.1) et (5.5), on a :

$$\operatorname{Res}\left[e^{aix}f(z),ib\right]=\frac{(-1)^{n-1}}{[(n-1)!]^2}\lim_{z\to ib}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(ia)^{n-k-1}e^{aiz}\frac{(-1)^{n+k-1}(n+k-1)!}{(z+ib)^{n+k}}$$

$$\operatorname{Res}\left[e^{aix}f(z),ib\right]=\frac{e^{-ab}}{[(n-1)!]^2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-k-1}i^{n-k-1}\frac{(-1)^{k}(n+k-1)!}{(2ib)^{n+k}}$$

$$\operatorname{Res}\left[e^{aix}f(z),ib\right]=\frac{i^{-1}a^{n-1}e^{-ab}}{(2b)^n[(n-1)!]^2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(n+k-1)!\frac{1}{(2ab)^k}$$

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[2\pi i\frac{i^{-1}a^{n-1}e^{-ab}}{(2b)^n[(n-1)!]^2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(n+k-1)!\frac{1}{(2ab)^k}\right]$$

$$\boldsymbol{\int_0^\infty\frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^n}dx=\frac{\pi a^{n-1}e^{-ab}}{(2b)^n[(n-1)!]^2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(n+k-1)!\frac{1}{(2ab)^k}}$$

Si on place place la fonction exponentielle en deuxième position dans la formule de Leibniz, on a :

$$\operatorname{Res}\left[e^{aix}f(z),ib\right]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{x\to ib}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{\partial^{n-k-1}}{\partial z^{n-k-1}}\left(\frac{1}{(z+ib)^n}\right)\frac{\partial^{k}}{\partial z^{k}}\left(e^{aiz}\right)$$

Si on fait la même procédure comme le cas précédent, on va trouver :

$$\boldsymbol{\int_0^\infty\frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^n}dx=\frac{\pi e^{-ab}}{(2b)^{2n-1}[(n-1)!]^2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(2n-k-2)!\,(2ab)^k}$$

## REFERENCES


- S. Bensid et M.B Zahaf*, fonction d'une variable complexe (Math4),* cours inédit, Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen, Algérie, 2015
- B. Candelpergher, *calcul intégral*, Cassini, Paris, 2009
- J. Etiaitho, *Analyse 1*, cours inédit, ISP-Kis, Kisangani, 2017
- K. A. Khaoula, *algèbre linéaire*, cours inédit, université d'Ottawa,
- C. L. Vălean, *(Almost) Impossible Integrales, Sums, and Series*, Springer,2019