BENNY LÊ VĂN

NGUYÊN HÀM PHÂN THỨC DẠNG TỔNG QUÁT

INTEGRATING A GENERALIZED RATIONAL FUNCTION

$$I_N = \int \frac{dx}{1 + x^N} \quad (N \in \mathbb{N})$$

TRI ÂN BẬC SINH THÀNH DƯỠNG DỤC

THIS BOOK IS DEDICATED TO MY PARENTS

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với

Nhà giáo Đàm Quang Vũ

Nhà giáo Nguyễn Thành Nhơn

Nhà giáo Dương Bửu Lộc

Giáo sư Dan Sitaru

Tạp chí Toán học Romania

With sincere gratitude to

Mr. Dam Quang Vu

Mr. Nguyen Thanh Nhon

Mr. Duong Buu Loc

Prof. Dan Sitaru

Romanian Mathematical Magazine

NGUYÊN HÀM PHÂN THỨC DẠNG TỔNG QUÁT

Benny Lê Văn

Tóm lược

Chuyên luận này trình bày lời giải cho nguyên hàm (tích phân bất định) của hàm phân thức có dạng tổng quát như sau:

$$I_N = \int \frac{dx}{1 + x^N}$$

Trong đó N là một số tự nhiên. Tập chuyên luận này được soạn thảo không chỉ với mục đích trình bày đáp án cho bài toán, mà quan trọng hơn chính là giới thiệu diễn trình mà tác giả thực hiện nhằm tìm ra kết quả. Cụ thể, tác giả lần lượt tiếp cận bài toán nguyên hàm theo từng trường hợp N là lũy thừa của hai, N là số lẻ và N là số chẵn. Cuối cùng, những kết quả của từng trường hợp cụ thể được áp dụng để xây dựng kết quả tổng quát.

Từ khóa: Nguyên hàm (Tích phân bất định), Hàm phân thức.

1. Giới thiệu

Tích phân bất định có dạng

$$I_N = \int \frac{dx}{1+x^N} \quad (N \in \mathbb{N})$$

là bài toán xuất hiện xuyên suốt trong tập chuyên luận này. Đầu tiên chính là tiếp cận những trường hợp đơn giản sau đây:

Khi $N = 0$, $N = 1$, và $N = 2$ ta lần lượt có:

$$I_0 = \int dx = x + const$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| + const$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + const$$

Ngoài ra, hai nguyên hàm sau được áp dụng rất nhiều trong suốt chuyên luận

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} \quad (a > 0)$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$$

Để tính J_1, ta phân tích:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$$

Do đó

$$J_1 = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + const$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + const$$

Còn đối với J_2, ta áp dụng kết quả của I_2 đã tính ở trên như sau:

$$J_2 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + const$$

Với $N = 3$, ta xét tới nguyên hàm sau:

$$I_3 = \int \frac{dx}{1+x^3}$$

Áp dụng $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$, ta cần tìm các số A, B, và C sao cho

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{C}{x+1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Trong hệ thức trên, lần lượt cho $x = 0$, $x = 1$, và $x = 2$, ta được hệ:

$$\begin{cases} B + C = 1 \\ A + B + \frac{1}{2}C = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow (A; B; C) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

Như vậy, bài toán I_3 được giải quyết như sau:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int \frac{dx}{1+x^3} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{-x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C \\
&= -\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C \\
&= -\frac{1}{6}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C
\end{aligned}$$

Sau những bài toán mở đầu trong Phần giới thiệu, chuyên luận sẽ trình bày từng trường hợp cụ thể của N để hướng đến kết quả tổng quát. Theo đó, từ Phần 2 đến Phần 6 thảo luận về trường hợp khi N là lũy thừa của hai, tức là $N = 2^n$ $(n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$; Phần 7 thảo luận về trường hợp N là số lẻ, tức là $N = 2s+1$ $(s \in \mathbb{N}^+)$; Phần 8 thảo luận về trường hợp N là số chẵn, tức là $N = 2r$ $(r \in \mathbb{N}; r \geq 2)$; và Phần 9 đưa ra kết luận cho bài toán tổng quát.

2. N = 4: một bài toán có nhiều cách giải

Phần này sẽ bàn về những cách giải khác nhau cho trường hợp $N = 4$.

$$I_4 = \int \frac{dx}{1 + x^4}$$

2.1. Phương pháp cân bằng hệ số

Đầu tiên, chúng ta thực hiện phân tích thành nhân tử đối với mẫu thức dưới dấu tích phân:

$$\begin{aligned}
&x^4 + 1 \\
&= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 \\
&= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 \\
&= \left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)
\end{aligned}$$

Như vậy, để tích phân bất định I_2 được tính một cách dễ dàng, chúng ta sẽ cố gắng đưa phân thức dưới dấu tích phân về dạng

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Trong đó A, B, C, và D là các số thực cho trước.

Từ hệ thức trên, lần lượt thay thế các giá trị $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ và $x = i$ (do $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} B + D = 1 \\ \sqrt{2}A + B + \dfrac{1}{5}\left(\sqrt{2}C + D\right) = \dfrac{1}{5} \\ -\dfrac{A}{\sqrt{2}} + \dfrac{Bi}{\sqrt{2}} + \dfrac{C}{\sqrt{2}} - \dfrac{Di}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (A; B; C; D) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right)$$

Như vậy

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \frac{dx}{1 + x^4} \\
&= \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{-2x + \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \\
&\qquad + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

$$+ \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x - 1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x + 1\right)\right]$$

$$+ const$$

2.2. Phương pháp phân tích I

Khi gặp một vấn đề phức tạp thì ta có thể chia nó ra thành nhiều phần nhỏ để giải quyết. Ngược lại, khi gặp một bài toán thoạt nhìn có vẻ đơn giản nhưng lại khó giải thì ta có thể biểu diễn nó dưới dạng kết hợp của nhiều bài toán lớn hơn mà ta có thể giải được. Tư tưởng này được sử dụng triệt để trong phương pháp phân tích.

Nguyên hàm

$$I_4 = \int \frac{dx}{1 + x^4}$$

Mới nhìn qua thì có vẻ không tính được một cách trực tiếp, tuy nhiên các nguyên hàm sau thì lại có thể được tính một cách dễ dàng:

$$K_1 = \int \frac{x^3}{x^4 + 1}dx$$

$$K_2 = \int \frac{x}{x^4 + 1}dx$$

Thật vậy

$$K_1 = \int \frac{x^3}{x^4 + 1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4 + 1)}{x^4 + 1} = \frac{1}{4}\ln(x^4 + 1) + const$$

$$K_2 = \int \frac{x}{x^4 + 1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2 + 1} = \frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2) + const$$

Ngoài ra

$$\frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{2(x^2 + 1)}{x^4 + 1}$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
K_3 &= \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \frac{d\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} + \int \frac{d\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)\right]+const
\end{aligned}
$$

Từ các kết quả của K_1, K_2, và K_3, ta có hệ quả: mọi nguyên hàm dạng sau đều có thể tính được

$$\int \frac{x^3+x+\kappa(x^2+1)}{x^4+1}dx = \int \frac{x^3+\kappa x^2+x+\kappa}{x^4+1}dx$$

Với κ là một số thực cho trước.

Như vậy, bằng cách nào đó, nếu ta tính được nguyên hàm

$$\int \frac{x^3+\kappa x^2+x}{x^4+1}dx$$

Thì nhờ vào một phép lấy hiệu hai nguyên hàm, ta sẽ tính được

$$I_4 = \int \frac{dx}{1+x^4}$$

Đây chính là hướng đi của phương pháp phân tích I.

Từ kết quả phân tích đa thức thành nhân tử

$$x^4+1 = \left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$$

Ta thấy rằng nếu như chọn $\kappa = \pm\sqrt{2}$ thì bài toán sẽ được hoàn tất. Ở đây với $\kappa = \sqrt{2}$, ta có:

$$
\begin{aligned}
K_4 &= \int \frac{x^3+\sqrt{2}x^2+x}{x^4+1}dx \\
&= \int \frac{x^3+\sqrt{2}x^2+x}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}dx \\
&= \int \frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx
\end{aligned}
$$

$$= \int \frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x - 1\right) + const$$

Lấy tổ hợp tuyến tính các nguyên hàm K_1, K_2, và K_3, ta có:

$$K_5 = \int \frac{x^3 + \sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2}}{x^4 + 1} dx$$

$$= K_1 + K_2 + \sqrt{2}K_3$$

$$= \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \tan^{-1}(x^2) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x - 1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x + 1\right) + const$$

Để kết quả của hai phương pháp phân tích và cân bằng hệ số trở nêm nhất quán, ta thực hiện biến đổi:

$$\frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) - \frac{1}{2} \ln\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)$$

$$= \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) - \frac{1}{4} \ln\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x^4 + 1}{\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right)$$

Quay trở lại với I_4, ta có:

$$I_4 = \int \frac{dx}{1 + x^4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (K_5 - K_4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{4}\ln(x^4+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)\right]$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)\right] + const$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}(x^2) + const$$

So sánh với kết quả có được từ phương pháp cân bằng hệ số, chúng ta có được

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}(x^2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)\right] + const$$

$$\Leftrightarrow \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right) + \tan^{-1}(x^2) = const$$

Thật vậy, nếu như đặt

$$\Xi(x) = \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right) + \tan^{-1}(x^2)$$

Thì

$$\Xi'(x) = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1} - \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1} + \frac{2x}{x^4+1}$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2x^2+2\sqrt{2}x+2} - \frac{1}{2x^2-2\sqrt{2}x+2}\right) + \frac{2x}{x^4+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\left(-2\sqrt{2}x\right)}{x^4+1} + \frac{2x}{x^4+1}$$

$$= -\frac{2x}{x^4+1} + \frac{2x}{x^4+1}$$

$$= 0$$

$$\Xi'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Xi(x) = const \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ngoài ra, ta có $\Xi(0) = \frac{\pi}{2}$, do đó:

$$\Xi(x) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cùng một bài toán tính nguyên hàm, nhưng tính với hai cách khác nhau, sẽ cho hai cách biểu diễn kết quả khác nhau, đây cũng chính là ý nghĩa của hằng số tích phân mà ta thường viết sau mỗi kết quả tính được.

2.3. *Phương pháp phân tích II*

Trong phương pháp phân tích I, chúng ta đã sử dụng kết quả

$$\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}=\frac{2(x^2+1)}{x^4+1}$$

Đó chính là phép lấy tổng hai phân thức, còn nếu như lấy hiệu, chúng ta được

$$\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}=\frac{2\sqrt{2}x}{x^4+1}$$

Đối với phương pháp phân tích II, ta sẽ vận dụng cả hai kết quả trên để tính nguyên hàm I_4 như sau:

$$I_4=\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\int\frac{x^2}{x^4+1}dx$$

Trong Phần 2.2, ta đã có:

$$K_3=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)\right]+const$$

Để tính nguyên hàm

$$K_6=\int\frac{x^2}{x^4+1}dx$$

Ta thực hiện lấy hiệu:

$$\begin{aligned}
K_6 &=\int\frac{x^2}{x^4+1}dx\\
&=\int\frac{x.x}{x^4+1}dx\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int x\left(\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)dx\right]\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int\frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx-\int\frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\right]\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx-\int\frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\right]\\
&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx-\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\right]\\
&\qquad+\frac{1}{4}\left[\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\int \frac{d\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \int \frac{d\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right]$$

$$+ \frac{1}{4}\left[\int \frac{d\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} - \int \frac{d\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) + + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)\right]$$
$$+ const$$

Và cuối cùng

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^4+1} = K_3 - K_6$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)\right]$$
$$+ const$$

Kết quả này nhất quán với phương pháp cân bằng hệ số.

Bài toán tìm nguyên hàm I_4 đã được giải theo ba cách khác nhau, mỗi cách đều có ưu điểm và khuyết điểm riêng. Phương pháp cân bằng hệ số chính là con đường logic nhất để đi, còn hai phương pháp phân tích giúp ta vận dụng những đẳng thức để biến đổi phân thức dưới dấu tích phân. Tuy nhiên, nhìn chung cả ba phương pháp đã được tiếp cận đều khá dài và có khối lượng tính toán tương đối nhiều. Do đó, việc tìm ra một cách giải ngắn gọn chính là vấn đề cấp thiết, cách giải này sẽ giúp chúng ta rất nhiều cho việc phát triển lên nguyên hàm tổng quát:

$$I_{2^n} = \int \frac{dx}{1+x^{2^n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

2.4. Phương pháp Tổng-Hiệu

Phương pháp này lấy cảm hứng từ hai đẳng thức đại số hết sức đơn giản, đó là

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2$ và $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 2$

Để tính nguyên hàm I_4, chúng ta sẽ lần lượt tính hai nguyên hàm "tổng" và "hiệu" sau:

$$K_3 = \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

Và

$$K_7 = \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$$

Tất nhiên K_3 và K_7 sẽ được tính theo một cách hoàn toàn mới, dựa vào hai đẳng thức đại số nêu trên.

Để xây dựng cầu nối giữa đề bài và chìa khóa, trước hết ta phải chia cả tử và mẫu của các phân thức dưới dấu tích phân cho x^2. Theo đó thì

$$K_3 = \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

$$= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx$$

$$= \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + const$$

Và

$$K_7 = \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$$

$$= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx$$

$$= \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}} \right| + const$$

K_3 và K_7 được tính dễ dàng nhờ một thủ thuật đơn giản nhưng cực kỳ hiệu quả, và từ đó chúng ta có được:

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}(K_3 - K_7)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + const$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + const$$

So sánh kết quả này với kết quả có được từ phương pháp cân bằng hệ số, một lần nữa hằng số tích phân gây ra hiệu ứng

$$\tan^{-1}(\sqrt{2}x + 1) + \tan^{-1}(\sqrt{2}x - 1) - \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ngoài việc ngắn gọn một cách đáng kinh ngạc, phương pháp Tổng-Hiệu còn giúp ta giải quyết nhanh chóng tất cả các nguyên hàm có dạng

$$I_4^0(\mu) = \int \frac{dx}{x^4 + \mu x^2 + 1}$$

Hay

$$I_4^2(\nu) = \int \frac{x^2}{x^4 + \nu x^2 + 1} dx$$

Trong đó, μ và ν là những số thực cho trước.

Với một vấn đề trong Phần 2, chúng ta đã tiếp cận đến bốn cách giải khác nhau. Có lẽ, nếu cần phải giải bài toán tính nguyên hàm I_4, ta chỉ cần chọn một cách là đủ, và rõ ràng phương pháp Tổng-Hiệu là tối ưu nhất, về tính hiệu quả cũng như tính nghệ thuật. Tuy nhiên, khi biết được nhiều cách giải khác nhau, chúng ta sẽ có nhiều phương án lựa chọn hơn cho các vấn đề khó và phức tạp hơn, chẳng hạn như bài toán tính nguyên hàm I_8.

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8 + 1}$$

Nhưng trước khi giải quyết vấn đề này, chúng ta sẽ thảo luận về các nguyên hàm I_5 và I_6 trong phần kế tiếp.

3. Trường hợp $N = 5$ và $N = 6$

3.1. Nguyên hàm I_5

Phần này thảo luận về nguyên hàm

$$I_5 = \int \frac{dx}{x^5 + 1}$$

Đầu tiên chúng ta sẽ thực hiện phân tích mẫu thức dưới dấu tích phân thành nhân tử như sau:

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

Nhân tử $(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ có thể được phân tích thêm dựa vào ứng dụng của số phức như sau:

$$\begin{aligned}
& x^5 + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow x^5 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi \\
& \Leftrightarrow x_k = \cos\frac{\pi + k2\pi}{5} + i\sin\frac{\pi + k2\pi}{5} \quad (k = \overline{0;4}) \\
& \Leftrightarrow x_k = \left(e^{i\pi}/_5; e^{3i\pi}/_5; -1; e^{7i\pi}/_5; e^{9i\pi}/_5\right) \quad (k = \overline{0;4})
\end{aligned}$$

Trong đó:

$$\begin{cases} x_0 + x_4 = 2\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_1 + x_2 = 2\cos\dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x_0 x_4 = x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

Như vậy,

$$x^5 + 1 = (x + 1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{5} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{5} + 1\right)$$

Với phương pháp cân bằng hệ số, chúng ta cần tìm bộ năm số thực $(A; B; C; D; E)$ sao cho

$$\frac{1}{x^5 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Lần lượt thay vào hệ thức trên năm giá trị bất kỳ của x thỏa $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, chúng ta tìm được:

$$(A; B; C; D; E) = \left(\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; -\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

Phương pháp cân bằng hệ số cho kết quả như sau:

$$\frac{1}{x^5+1}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x^3+2x^2-3x+4}{x^4-x^3+x^2-x+1}\right)$$

Đến đây, chúng ta tiếp tục tìm bộ bốn số thực $(T;U;V;W)$ sao cho

$$\frac{-x^3+2x^2-3x+4}{x^4-x^3+x^2-x+1}=\frac{Tx+U}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{5}+1}+\frac{Vx+W}{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{5}+1}\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Với các giá trị $x=0$, $x=1$ và $x=i$ (do $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$), ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} U+W=4 \\ \dfrac{T+U}{2-2\cos\frac{\pi}{5}}+\dfrac{V+W}{2-2\cos\frac{3\pi}{5}}=2 \\ -\dfrac{T}{2\cos\frac{\pi}{5}}+\dfrac{Ui}{2\cos\frac{\pi}{5}}-\dfrac{V}{2\cos\frac{3\pi}{5}}+\dfrac{Wi}{2\cos\frac{3\pi}{5}}=2-2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T;U;V;W)=\left(-2\cos\frac{\pi}{5};2;-2\cos\frac{3\pi}{5};2\right)$$

Như vậy:

$$\frac{-x^3+2x^2-3x+4}{x^4-x^3+x^2-x+1}=\frac{-2x\cos\frac{\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{5}+1}+\frac{-2x\cos\frac{3\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{5}+1}\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Dựa vào những phân tích và thực hiện, nguyên hàm I_5 sẽ được tính như sau:

$$\begin{aligned}
I_5&=\int\frac{dx}{x^5+1}\\
&=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x^3+2x^2-3x+4}{x^4-x^3+x^2-x+1}\right)dx\\
&=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-2x\cos\frac{\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{5}+1}+\frac{-2x\cos\frac{3\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{5}+1}\right)dx\\
&=\frac{1}{5}\left(\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{-2x\cos\frac{\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{5}+1}dx+\int\frac{-2x\cos\frac{3\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{5}+1}dx\right)\\
&=\frac{1}{5}\left(\ln|x+1|+\int\frac{-2x\cos\frac{\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{5}+1}dx+\int\frac{-2x\cos\frac{3\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{5}+1}dx\right)\\
&\qquad +const
\end{aligned}$$

Trước khi tiếp tục với nguyên hàm I_5, ta xem xét nguyên hàm sau:

$$L(\delta) = \int \frac{-2x\cos\delta + 2}{x^2 - 2x\cos\delta + 1} dx$$

$$= \int \frac{-2x\cos\delta + 2(\cos\delta)^2 + 2(\sin\delta)^2}{x^2 - 2x\cos\delta + 1} dx$$

$$= -\cos\delta \int \frac{2x + 2(\cos\delta)^2}{x^2 - 2x\cos\delta + 1} dx + 2(\sin\delta)^2 \int \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\delta + 1}$$

$$= -\cos\delta \int \frac{d(x^2 - 2x\cos\delta + 1)}{x^2 - 2x\cos\delta + 1} dx$$

$$+ 2(\sin\delta)^2 \int \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\delta + (\cos\delta)^2 + (\sin\delta)^2}$$

$$= -\cos\delta \ln(x^2 - 2x\cos\delta + 1) + 2(\sin\delta)^2 \int \frac{d(x - \cos\delta)}{(x - \cos\delta)^2 + (\sin\delta)^2}$$

$$= -\cos\delta \ln(x^2 - 2x\cos\delta + 1) + 2\sin\delta \tan^{-1}\frac{x - \cos\delta}{\sin\delta} + const$$

Trở lại với nguyên hàm I_5:

$$I_5 = \frac{1}{5}\left[\ln|x+1| + L\left(\frac{\pi}{5}\right) + L\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right] + const$$

$$= \frac{1}{5}\left[\ln|x+1| - \cos\frac{\pi}{5}\ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{5} + 1\right) + 2\sin\frac{\pi}{5}\tan^{-1}\frac{x - \cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\right.$$

$$\left. - \cos\frac{3\pi}{5}\ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{5} + 1\right) + 2\sin\frac{3\pi}{5}\tan^{-1}\frac{x - \cos\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{3\pi}{5}}\right]$$

$$+ const$$

Một cách tình cờ, kết quả nguyên hàm I_3 có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$I_3 = \int \frac{dx}{x^3 + 1}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln|x+1| + L\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] + const$$

Điều này dẫn đến việc xây dựng kết quả tổng quát đối với trường hợp N là số lẻ, tức là $N = 2s + 1$ ($s \in \mathbb{N}^+$) sẽ được thảo luận trong Phần 7.

3.2. Nguyên hàm I_6

Với $x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$, nguyên hàm I_6 được tính như sau:

$$I_6=\int\frac{dx}{x^6+1}$$

$$=\int\frac{(x^2+1)-x^2}{x^6+1}dx$$

$$=\int\frac{x^2+1}{x^6+1}dx-\int\frac{x^2}{x^6+1}dx$$

$$=\int\frac{x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx-\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}$$

$$=\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+const$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+const$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+const$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}dx-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+const$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+const$$

$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{3}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+const$$

$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right)-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+const$$

Cách giải này đã vận dụng nguyên hàm $I_4^0(\mu)$ với $\mu=-1$, cụ thể là

$$I_4^0(-1)=\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}$$

4. $N = 8$: kết hợp nhiều cách giải vào một bài toán

Phần này tập trung tìm lời giải cho bài toán nguyên hàm sau:

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8 + 1}$$

Việc đầu tiên cần phải làm chính là phân tích thành nhân tử cho mẫu thức dưới dấu tích phân:

$$\begin{aligned}
&x^8 + 1 \\
&= x^8 + 2x^4 + 1 - 2x^4 \\
&= (x^4 + 1)^2 - 2x^4 \\
&= \left(x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1\right)\left(x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1\right) \\
&= \left(x^4 - 2x^2 \cos\frac{\pi}{4} + 1\right)\left(x^4 + 2x^2 \cos\frac{\pi}{4} + 1\right) \\
&= \left(x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 \cos\frac{\pi}{4} - 2x^2\right)\left(x^4 + 2x^2 + 1 + 2x^2 \cos\frac{\pi}{4} - 2x^2\right) \\
&= \left[(x^2 + 1)^2 - 2x^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[(x^2 + 1)^2 - 2x^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \left[(x^2 + 1)^2 - 4x^2\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2\right]\left[(x^2 + 1)^2 - 4x^2\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2\right] \\
&= \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{8} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{\pi}{8} + 1\right)\left(x^2 - 2x\sin\frac{\pi}{8} + 1\right)\left(x^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + 2x\sin\frac{\pi}{8} + 1\right)
\end{aligned}$$

Con đường đầu tiên mà chúng ta có thể chọn chính là phương pháp cân bằng hệ số. Theo đó thì cần phải tìm một bộ số thực (A, B, C, D, E, F, G, H) sao cho

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^8 + 1} \\
&\qquad = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{8} + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x\cos\frac{\pi}{8} + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 - 2x\sin\frac{\pi}{8} + 1} \\
&\qquad + \frac{Gx + H}{x^2 + 2x\sin\frac{\pi}{8} + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Lần lượt thế tám giá trị x bất kỳ vào phương trình trên, ta sẽ tìm được bộ số thực (A, B, C, D, E, F, G, H) thông qua một hệ phương trình tuyến tính bao gồm tám ẩn số!

Có thể với hướng đi này, kết quả sau cùng cho bài toán rồi cũng sẽ được khám phá. Bài toán có hướng giải quyết, tuy nhiên việc đối mặt với một khối lượng tính toán tương đối lớn là điều không thể tránh khỏi. Đó là chưa kể, sau khi tìm được bộ số thực (A, B, C, D, E, F, G, H), chúng ta phải tiếp tục xử lý nhiều nguyên hàm có dạng

$$\int \frac{ux + v}{px^2 + qx + r} dx$$

Điều này xin được phép nhường lại cho máy tính. Chúng ta có thể tạm gác lại phương pháp cân bằng hệ số, và sử dụng những hướng đi khác trong phần 2 để giải quyết bài toán.

Phương pháp Tổng-Hiệu đã tỏ ra hiệu quả một cách đáng kinh ngạc, điều này phần nào cũng được minh họa cụ thể trong phần 3. Vậy nếu áp dụng trực tiếp phương pháp này cho nguyên hàm I_8 thì sao?

Theo con đường Tổng-Hiệu ấy, ta cần phải tính lần lượt hai nguyên hàm sau

$$N_1 = \int \frac{x^4 + 1}{x^8 + 1} dx$$

$$N_2 = \int \frac{x^4 - 1}{x^8 + 1} dx$$

Trong Phần 2, chúng ta đã chia cả tử thức và mẫu thức dưới dấu tích phân cho x^2, phải chăng ở đây ta sẽ chia cả tử thức và mẫu thức dưới dấu tích phân cho x^4? Theo đó:

$$N_1 = \int \frac{x^4 + 1}{x^8 + 1} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^4}}{x^4 + \frac{1}{x^4}} dx$$

Việc biểu diễn $\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$ theo $\left(x \pm \frac{1}{x}\right)$ hay $\left(x^2 \pm \frac{1}{x^2}\right)$ là hoàn toàn khả thi. Tuy nhiên, ta phải lưu ý rằng

$$d\left(x \pm \frac{1}{x}\right) = \left(1 \mp \frac{1}{x^2}\right) dx$$

Và

$$d\left(x^2 \pm \frac{1}{x^2}\right) = \left(2x \mp \frac{2}{x^3}\right) dx$$

Dù rất muốn, nhưng chúng ta không thể tìm được mối liên hệ với $\left(1+\frac{1}{x^4}\right)dx$ bên trong dấu tích phân. Như vậy, hướng đi này tới đây là gặp bế tắc.

Kỹ thuật Tổng-Hiệu trong Phần 2.4 không thể tái hiện một màn trình diễn mạnh mẽ ở đây được. Chúng ta phải tạm gác lại phương pháp này. Xin nhấn mạnh rằng chỉ là tạm gác lại thôi, bởi dù tính theo cách khác, chúng ta vẫn sẽ cần đến phương pháp Tổng-Hiệu cho các công đoạn sau đó.

Vậy là chỉ còn phương pháp phân tích, tác giả xin được trình bày theo cả hai phương pháp I và II. Cả hai trường phái đều được xây dựng dựa trên cơ sở đưa nguyên hàm cần tìm thành tổ hợp tuyến tính của hai nguyên hàm phụ:

$$N_1=\int\frac{x^4+1}{x^8+1}dx$$

$$N_3=\int\frac{x^4}{x^8+1}dx$$

Ta có phân tích:

$$\frac{x^4+1}{x^8+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^4-\sqrt{2}x^2+1}+\frac{1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}\right)$$

Cho nên

$$N_1=\int\frac{x^4+1}{x^8+1}dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{x^4-\sqrt{2}x^2+1}+\int\frac{dx}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}\right)$$

Lúc này, chúng ta sẽ thấy ngay hệ quả của phương pháp Tổng-Hiệu là tuyệt vời như thế nào, khi mà:

$$I_4^0\left(-\sqrt{2}\right)=\int\frac{dx}{x^4-\sqrt{2}x^2+1}$$

Và

$$I_4^0\left(\sqrt{2}\right)=\int\frac{dx}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}$$

Trước khi tính $I_4^0\left(-\sqrt{2}\right)$ và $I_4^0\left(\sqrt{2}\right)$, ta sẽ thực hiện phân tích cho nguyên hàm N_3.

Áp dụng phương pháp phân tích I, chúng ta sẽ có:

$$N_3=\int\frac{x^4}{x^8+1}dx=\int\frac{x^2.x^2}{x^8+1}dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int x^2 \left(\frac{1}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} - \frac{1}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int \frac{x^2}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} dx - \int \frac{x^2}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[I_4^2(-\sqrt{2}) - I_4^2(\sqrt{2}) \right]$$

Theo phương pháp phân tích II, chúng ta có thể làm như sau:

$$\frac{x^4}{x^8 + 1} = \frac{x^4}{(x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1)(x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{(x^6 + \sqrt{2}x^4 + x^2) - (x^6 + x^2)}{(x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1)(x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1)} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{x^2}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} - \frac{x^2(x^4 + 1)}{(x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1)(x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1)} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{x^2}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} - \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} + \frac{1}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x^2}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} - \frac{x^2}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} \right)$$

Sau khi tiếp cận bằng phương pháp phân tích, ta nhận thấy phương pháp cân bằng hệ số vẫn có thể được dùng ở đây. Thật vậy, lúc này ta sẽ cần tìm bộ số thực (A, B, C, D) thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{x^8 + 1} = \frac{Ax^2 + B}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} + \frac{Cx^2 + D}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

Phương trình (4.1) khá giống với phương trình (2.1). Và thật ra, thay x trong (2.1) bằng x^2 ta sẽ được (4.1). Do đó, kết quả bộ số thực (A, B, C, D) ở hai phương trình này là hoàn toàn giống nhau, tức là $A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, và $D = \frac{1}{2}$.

Do đó có thể nói rằng tích phân bất định I_8 là sự kết hợp của nhiều cách giải vào một bài toán. Điều này càng đúng hơn khi ta dùng phương pháp Tổng-Hiệu để giải quyết triệt để công đoạn thứ hai của bài toán.

Với hệ quả của phương pháp Tổng-Hiệu đã được trình bày trong phần 2.3, ta có những nguyên hàm sau:

$$I_4^0(-\sqrt{2}) = \int \frac{dx}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1}$$

$$I_4^0(\sqrt{2}) = \int \frac{dx}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1}$$

$$I_4^2(-\sqrt{2}) = \int \frac{x^2}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} dx$$

$$I_4^2(\sqrt{2}) = \int \frac{x^2}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} dx$$

Và trở lại với I_8, chúng ta có:

$$\frac{1}{x^8 + 1} = \frac{x^4 + 1}{x^8 + 1} - \frac{x^4}{x^8 + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} + \frac{1}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x^2}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} - \frac{x^2}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1}\right)$$

Hay đưa vào dấu tích phân thì ta được:

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8 + 1} = \frac{1}{2}\left[I_4^0(-\sqrt{2}) + I_4^0(\sqrt{2})\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-I_4^2(-\sqrt{2}) + I_4^2(\sqrt{2})\right]$$

Bây giờ, để tính các nguyên hàm có dạng $I_4^0(\mu)$ và $I_4^2(\nu)$, ta cần các phân tích đa thức thành nhân tử như sau

$$x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 \cos\frac{\pi}{4} + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 \cos\frac{\pi}{4} - 2x^2$$

$$= (x^2 + 1)^2 - 2x^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= (x^2 + 1)^2 - 4x^2\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$$

Cũng như

$$x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 \cos\frac{\pi}{4} + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 + 2x^2 \cos\frac{\pi}{4} - 2x^2$$

$$= (x^2 + 1)^2 - 2x^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= (x^2+1)^2 - 4x^2\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$$

Cần lưu ý rằng

$$2+\sqrt{2} = 2 + 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$$

Và

$$2-\sqrt{2} = 2 - 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$$

Trở lại với việc tính các nguyên hàm $I_4^0(\mu)$ và $I_4^2(\nu)$, giống như trong phần 2.3, ta sẽ cần tính các nguyên hàm "tổng" và "hiệu". Và để tiện cho việc tính toán, ta sẽ ký hiệu các nguyên hàm "tổng" và "hiệu" này như sau:

$$I_4^+(\lambda) = \int \frac{x^2+1}{x^4+\lambda x^2+1}dx$$

$$I_4^-(\lambda) = \int \frac{x^2-1}{x^4+\lambda x^2+1}dx$$

Trong đó λ là một số thực cho trước.

Ta lần lượt có:

$$I_4^+\left(-\sqrt{2}\right) = \int \frac{x^2+1}{x^4-\sqrt{2}x^2+1}dx$$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-\sqrt{2}}dx$$

$$= \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2-\sqrt{2}}$$

$$= \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\csc\frac{\pi}{8}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{\pi}{8}} + const$$

Và

$$I_4^-\left(-\sqrt{2}\right) = \int \frac{x^2-1}{x^4-\sqrt{2}x^2+1}dx$$

$$= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{2}} dx$$

$$= \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)}$$

$$= \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sec\frac{\pi}{8}\ln\left|\frac{x + \frac{1}{x} - 2\cos\frac{\pi}{8}}{x + \frac{1}{x} + 2\cos\frac{\pi}{8}}\right| + const$$

$$= \frac{1}{4}\sec\frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{8} + 1}{x^2 + 2x\cos\frac{\pi}{8} + 1}\right) + const$$

Đối với $I_4^+\left(\sqrt{2}\right)$ và $I_4^-\left(\sqrt{2}\right)$, ta cũng tính toán hoàn toàn tương tự như sau:

$$I_4^+\left(\sqrt{2}\right) = \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} dx$$

$$= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{2}} dx$$

$$= \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 + \sqrt{2}}$$

$$= \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{8}\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{8}} + const$$

Và

$$I_4^-\left(\sqrt{2}\right) = \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} dx$$

$$= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{2}} dx$$

$$= \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{2}\right)}$$

$$= \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\csc\frac{\pi}{8}\ln\left|\frac{x + \frac{1}{x} - 2\sin\frac{\pi}{8}}{x + \frac{1}{x} + 2\sin\frac{\pi}{8}}\right| + const$$

$$= \frac{1}{4}\csc\frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{x^2 - 2x\sin\frac{\pi}{8} + 1}{x^2 + 2x\sin\frac{\pi}{8} + 1}\right) + const$$

Trong đó $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ và $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$.

Trở lại với các nguyên hàm $I_4^0(-\sqrt{2})$, $I_4^0(\sqrt{2})$, $I_4^2(-\sqrt{2})$, và $I_4^2(\sqrt{2})$, ta có:

$$I_4^0(-\sqrt{2}) = \int \frac{dx}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} = \frac{1}{2}\left[I_4^+(-\sqrt{2}) - I_4^-(-\sqrt{2})\right]$$

$$I_4^0(\sqrt{2}) = \int \frac{dx}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} = \frac{1}{2}\left[I_4^+(\sqrt{2}) - I_4^-(\sqrt{2})\right]$$

$$I_4^2(-\sqrt{2}) = \int \frac{x^2}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} dx = \frac{1}{2}\left[I_4^+(-\sqrt{2}) + I_4^-(-\sqrt{2})\right]$$

$$I_4^2(\sqrt{2}) = \int \frac{x^2}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} dx = \frac{1}{2}\left[I_4^+(\sqrt{2}) + I_4^-(\sqrt{2})\right]$$

Và bước cuối cùng:

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8 + 1} = \frac{1}{2}\left[I_4^0(-\sqrt{2}) + I_4^0(\sqrt{2})\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-I_4^2(-\sqrt{2}) + I_4^2(\sqrt{2})\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[I_4^+(-\sqrt{2}) - I_4^-(-\sqrt{2}) + I_4^+(\sqrt{2}) - I_4^-(\sqrt{2})\right]$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[-I_4^+(-\sqrt{2}) - I_4^-(-\sqrt{2}) + I_4^+(\sqrt{2}) + I_4^-(\sqrt{2})\right]$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{8} I_4^+\left(-\sqrt{2}\right) - \frac{2+\sqrt{2}}{8} I_4^-\left(-\sqrt{2}\right) + \frac{2+\sqrt{2}}{8} I_4^+\left(\sqrt{2}\right)$$

$$- \frac{2-\sqrt{2}}{8} I_4^-\left(\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(2-\sqrt{2}\right)\left(I_4^+\left(-\sqrt{2}\right) - I_4^-\left(\sqrt{2}\right)\right) + \left(2+\sqrt{2}\right)\left(-I_4^-\left(-\sqrt{2}\right) + I_4^+\left(\sqrt{2}\right)\right)\right]$$

Cũng cần lưu ý rằng:

$$\left(2-\sqrt{2}\right)\left(I_4^+\left(-\sqrt{2}\right) - I_4^-\left(\sqrt{2}\right)\right)$$

$$= 4\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 \left[\frac{1}{2}\csc\frac{\pi}{8}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{4}\csc\frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{x^2-2x\sin\frac{\pi}{8}+1}{x^2+2x\sin\frac{\pi}{8}+1}\right)\right]$$

$$+ \, const$$

$$= \sin\frac{\pi}{8}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{\pi}{8}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\sin\frac{\pi}{8}+1}{x^2-2x\sin\frac{\pi}{8}+1}\right)\right] + const$$

Và tương tự

$$\left(2+\sqrt{2}\right)\left(-I_4^-\left(-\sqrt{2}\right) + I_4^+\left(\sqrt{2}\right)\right)$$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 \left[-\frac{1}{4}\sec\frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{x^2-2x\cos\frac{\pi}{8}+1}{x^2+2x\cos\frac{\pi}{8}+1}\right) + \frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{8}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{8}}\right]$$

$$+ \, const$$

$$= \cos\frac{\pi}{8}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{8}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{\pi}{8}+1}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{8}+1}\right)\right] + const$$

Trong hai phép biến đổi trên, ta đã sử dụng tính chất

$$\begin{cases} (\sin\theta)^2\csc\theta = \sin\theta \\ (\cos\theta)^2\sec\theta = \cos\theta \end{cases}$$

Hai tính chất này có được từ định nghĩa của các hàm lượng giác $\csc\theta$ và $\sec\theta$, với $\csc\theta$ và $\sec\theta$ lần lượt là nghịch đảo của $\sin\theta$ và $\cos\theta$.

Như vậy, kết hợp hàng loạt những phân tích và biến đổi ở trên lại thì kết quả sau cùng của nguyên hàm I_8 có thể được biểu diễn như sau:

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8+1}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\sin\frac{\pi}{8}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{\pi}{8}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\sin\frac{\pi}{8}+1}{x^2-2x\sin\frac{\pi}{8}+1}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \cos\frac{\pi}{8}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{8}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{\pi}{8}+1}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{8}+1}\right)\right]\right\} + const$$

Liệu kết quả của I_8 và I_4 có liên hệ gì với nhau? Khi mà kết quả của nguyên hàm I_4 đã tìm đượctrong Phần 2 có thể được viết lại như sau:

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^4+1}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) + const$$
$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\right] + const$$
$$= \frac{1}{4} * \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\right] + const$$
$$= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{\pi}{4}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\sin\frac{\pi}{4}+1}{x^2-2x\sin\frac{\pi}{4}+1}\right)\right] + const$$
$$= \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{4}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{\pi}{4}+1}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{4}+1}\right)\right] + const$$

Rõ ràng là kết quả các nguyên hàm I_8 và I_4 có liên hệ mật thiết với nhau. Mối quan hệ này là gì? Nếu được tìm thấy thì nó sẽ là một chiếc chìa khóa quan trọng cho việc giải quyết bài toán tổng quát I_{2^n}. Điều này sẽ được thảo luận trong những phần kế tiếp của tập chuyên luận, trước mắt là nguyên hàm

$$I_{16} = \int \frac{dx}{x^{16}+1}$$

5. N = 16: tính nguyên hàm bằng đạo hàm

Phần này sẽ tập trung tìm lời giải cho nguyên hàm

$$I_{16} = \int \frac{dx}{x^{16}+1}$$

Nguyên hàm trong phần trước giải được là nhờ vào phân tích:

$$\frac{1}{x^8+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^4-\sqrt{2}x^2+1} + \frac{1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x^2}{x^4+\sqrt{2}x^2+1} - \frac{x^2}{x^4-\sqrt{2}x^2+1}\right)$$

Như đã trình bày thì phân tích này có được từ việc tách (dù là phương pháp phân tích I hay II) hay cũng chính là kết quả từ việc phân tích hệ số cho phân thức dưới dấu tích phân của I_8:

$$\frac{1}{x^8+1} = \frac{Ax^2+B}{x^4-\sqrt{2}x^2+1} + \frac{Cx^2+D}{x^4+\sqrt{2}x^2+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Và chúng ta đã tìm được $A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, D = \frac{1}{2}$.

Như vậy, để tính guyên hàm I_8, chúng ta đưa nó về tổng các nguyên hàm có dạng

$$I_4^0(\mu) = \int \frac{dx}{x^4+\mu x^2+1}$$

Hay

$$I_4^2(\nu) = \int \frac{x^2}{x^4+\nu x^2+1}dx$$

Trong đó, μ và ν là những số thực cho trước. Và điều này thì có thể được giải quyết nhanh chóng nhờ phương pháp Tổng-Hiệu của phần 2.3.

Còn đối với nguyên hàm I_{16}, chúng ta cũng có thể thực hiện phân tích phân thức dưới dấu tích phân như sau:

$$\frac{1}{x^{16}+1} = \frac{Ax^4+B}{x^8-\sqrt{2}x^4+1} + \frac{Cx^4+D}{x^8+\sqrt{2}x^4+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Trong hệ thức trên, ta vẫn sẽ tìm được $A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, D = \frac{1}{2}$.

Sau đó, tiếp tục phân tích vế phải trong hệ thức trên về dạng tổng

$$\sum \frac{a_i x^2 + b_i}{x^4 + \kappa x^2 + 1}$$

Trong đó, a_i, b_i, và κ đều là những số thực cho trước. Nhưng κ sẽ được tìm thấy một cách trực tiếp thông qua việc phân tích những mẫu thức trong vế phải thành nhân tử, còn a_i, b_i là kết quả của thuật toán cân bằng hệ số, tức là thay x bởi hàng loạt các giá trị rồi giải hệ phương trình tuyến tính chứa các ẩn a_i, b_i.

Và nhờ vào phương pháp Tổng-Hiệu, những nguyên hàm dạng này có thể được tính một cách dễ dàng. Như vậy, mặc dù có thể phải thực hiện khối lượng tính toán tương đối nhiều, nhưng rõ ràng nguyên hàm I_{16} là hoàn toàn có hướng giải quyết.

Tuy nhiên, nhìn lại thì phần trước kết thúc mở ra một vấn đề mới, đó là mối liên hệ giữa kết quả các nguyên hàm I_8 và I_4, và liệu nó cũng có liên hệ với nguyên hàm I_{16} mà chúng ta đang xét đến trong phần này không? Nếu có thì chúng ta có thể dự đoán kết quả cho I_{16}.

Ta đã có

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{dx}{x^4 + 1} \\ &= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}\left[2\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2\sin\frac{\pi}{4}} + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\sin\frac{\pi}{4} + 1}{x^2 - 2x\sin\frac{\pi}{4} + 1}\right)\right] + const \\ &= \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4}\left[2\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{4}} + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cos\frac{\pi}{4} + 1}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{4} + 1}\right)\right] + const \end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned} I_8 &= \int \frac{dx}{x^8 + 1} \\ &= \frac{1}{8}\left\{\sin\frac{\pi}{8}\left[2\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2\sin\frac{\pi}{8}} + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\sin\frac{\pi}{8} + 1}{x^2 - 2x\sin\frac{\pi}{8} + 1}\right)\right]\right. \\ &\qquad \left. + \cos\frac{\pi}{8}\left[2\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{8}} + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cos\frac{\pi}{8} + 1}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{8} + 1}\right)\right]\right\} + const \end{aligned}$$

Trong hai kết quả trên, nếu như đặt

$$\eta(t) = t\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2t} + \ln\left(\frac{x^2+2xt+1}{x^2-2xt+1}\right)\right]$$

Cần lưu ý rằng $\eta(t)$ là một hàm theo biến t chứ không phải biến x.

Thì có thể biểu diễn lại

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^4+1}$$

$$= \frac{1}{4}\eta\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\eta\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + C$$

Cũng như

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8+1}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\eta\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) + \eta\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)\right] + const$$

$$= \frac{1}{8}\left[\eta\left(\cos\frac{\pi}{8}\right) + \eta\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)\right] + const$$

Do

$$\sin\frac{\pi}{8} = \cos\frac{3\pi}{8}$$

Và

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}$$

Trước khi dự đoán kết quả cho nguyên hàm I_{16}, ta thực hiện phân tích đa thức thành nhân tử đối với mẫu thức dưới dấu tích phân của I_{16}:

$$x^{16}+1 = x^{16}+2x^8+1-2x^8$$

$$= (x^8+1)^2 - 2x^8$$

$$= \left(x^8-\sqrt{2}x^4+1\right)\left(x^8+\sqrt{2}x^4+1\right)$$

$$= \left(x^8-2x^4\cos\frac{\pi}{4}+1\right)\left(x^8-2x^4\cos\frac{3\pi}{4}+1\right)$$

$$= \left(x^8+2x^4+1-2x^4-2x^4\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(x^8+2x^4+1-2x^4-2x^4\cos\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \left[(x^4+1)^2-2x^4\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[(x^4+1)^2-2x^4\left(1+\cos\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \left[(x^4+1)^2 - 4x^4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2\right]\left[(x^4+1)^2 - 4x^4\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2\right]$$

$$= \left(x^4 - 2x^2\cos\frac{\pi}{8} + 1\right)\left(x^4 + 2x^2\cos\frac{\pi}{8} + 1\right)\left(x^4 - 2x^2\cos\frac{3\pi}{8} + 1\right)$$

$$\left(x^4 + 2x^2\cos\frac{3\pi}{8} + 1\right)$$

$$= \left(x^4 - 2x^2\cos\frac{\pi}{8} + 1\right)\left(x^4 - 2x^2\cos\frac{3\pi}{8} + 1\right)\left(x^4 - 2x^2\cos\frac{5\pi}{8} + 1\right)$$

$$\left(x^4 - 2x^2\cos\frac{7\pi}{8} + 1\right)$$

Bởi vì

$$\cos\frac{\pi}{8} = -\cos\frac{7\pi}{8}$$

Và

$$\cos\frac{3\pi}{8} = -\cos\frac{5\pi}{8}$$

Việc biến đổi này là cần thiết, các đa thức bậc 4 trong dấu ngoặc trở nên nhất quán về dấu trừ. Do đó, ta có thể đặt

$$\zeta(t) = x^4 - 2x^2t + 1$$

Chú ý rằng $\zeta(t)$ là một hàm theo t.

Trở lại với việc phân tích đa thức thành nhân tử, ta lần lượt có:

Đối với $\zeta\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

$$\zeta\left(\frac{\pi}{8}\right) = x^4 - 2x^2\cos\frac{\pi}{8} + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 2x^2\cos\frac{\pi}{8}$$

$$= (x^2+1)^2 - 2x^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= (x^2+1)^2 - 4x^2\left(\cos\frac{\pi}{16}\right)^2$$

$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{\pi}{16} + 1\right)$$

Đối với $\zeta\left(\frac{3\pi}{8}\right)$:

$$\zeta\left(\frac{3\pi}{8}\right) = x^4 - 2x^2\cos\frac{3\pi}{8} + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 2x^2 \cos\frac{3\pi}{8}$$

$$= (x^2+1)^2 - 2x^2\left(1 + \cos\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= (x^2+1)^2 - 4x^2\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right)^2$$

$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{3\pi}{16} + 1\right)$$

Đối với $\zeta\left(\frac{5\pi}{8}\right)$:

$$\zeta\left(\frac{5\pi}{8}\right) = x^4 - 2x^2\cos\frac{5\pi}{8} + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 2x^2 \cos\frac{5\pi}{8}$$

$$= (x^2+1)^2 - 2x^2\left(1 + \cos\frac{5\pi}{8}\right)$$

$$= (x^2+1)^2 - 4x^2\left(\cos\frac{5\pi}{16}\right)^2$$

$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{5\pi}{16} + 1\right)$$

Đối với $\zeta\left(\frac{7\pi}{8}\right)$:

$$\zeta\left(\frac{7\pi}{8}\right) = x^4 - 2x^2\cos\frac{7\pi}{8} + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 2x^2 \cos\frac{7\pi}{8}$$

$$= (x^2+1)^2 - 2x^2\left(1 + \cos\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$= (x^2+1)^2 - 4x^2\left(\cos\frac{7\pi}{16}\right)^2$$

$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{7\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{7\pi}{16} + 1\right)$$

Như vậy

$$x^{16} + 1 = \prod_{k=0}^{3}\left[\left(x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16} + 1\right)\right]$$

Ngoài ra, do

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Nên ta cũng có thể viết lại

$$x^{16} + 1 = \prod_{k=0}^{3}\left[\left(x^2 - 2x\sin\frac{(2k+1)\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\sin\frac{(2k+1)\pi}{16} + 1\right)\right]$$

Nhìn lại cách xây dựng hàm $\eta(t)$, với

$$\eta(t) = t\left[2\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2t} + \ln\left(\frac{x^2 + 2xt + 1}{x^2 - 2xt + 1}\right)\right]$$

Thì ta đã có

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{dx}{x^4 + 1} \\ &= \frac{1}{4}\eta\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) + const \\ &= \frac{1}{4}\eta\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + const \end{aligned}$$

Cũng như

$$\begin{aligned} I_8 &= \int \frac{dx}{x^8 + 1} \\ &= \frac{1}{8}\left[\eta\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) + \eta\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)\right] + const \\ &= \frac{1}{8}\left[\eta\left(\cos\frac{\pi}{8}\right) + \eta\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)\right] + const \end{aligned}$$

Đối với biểu diễn kết quả của I_4, thì $\frac{\pi}{4}$ là một góc nhỏ hơn $\frac{\pi}{2}$. Điều này cũng chưa được rõ ràng lắm. Tuy nhiên nếu nhìn vào kết quả của I_8, thì $\frac{\pi}{8}$ và $\frac{3\pi}{8}$ đều là những bội góc lẻ của $\frac{\pi}{8}$, và càng thú vị hơn khi chúng đều không vượt quá $\frac{\pi}{2}$, cũng chính vì điều này mà trong các biểu diễn kết quả của I_4 và I_8, ta có thể thay thế hoàn toàn chữ cos bởi chữ sin. Và mối liên hệ với nguyên hàm I_{16} cũng phần nào được hé lộ, bởi trong việc phân tích mẫu thức dưới dấu tích phân thành nhân tử, ta thấy xuất hiện các cung $\frac{\pi}{16}$, $\frac{3\pi}{16}$, $\frac{5\pi}{16}$, và $\frac{7\pi}{16}$. Ngoài ra, những cung này đều là bội góc lẻ của $\frac{\pi}{16}$ và cũng không vượt quá cung $\frac{\pi}{2}$.

Còn một điều nữa cũng dẫn đến kết luận "có thể thay thế hoàn toàn chữ cos bởi chữ sin". Nếu như trong phần phân tích thành nhân tử đối với mẫu thức dưới dấu tích phân của I_{16}, ta không xác định hàm $\zeta(t)$ thì vẫn được kết quả hoàn toàn tương tự, bởi

$$x^4 + 2x^2 \cos\frac{\pi}{8} + 1$$
$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 + 2x^2 \cos\frac{\pi}{8}$$
$$= (x^2+1)^2 - 2x^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{8}\right)$$
$$= (x^2+1)^2 - 4x^2\left(\sin\frac{\pi}{16}\right)^2$$
$$= \left(x^2 - 2x\sin\frac{\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\sin\frac{\pi}{16} + 1\right)$$
$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{7\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{7\pi}{16} + 1\right)$$

Cũng như

$$x^4 + 2x^2 \cos\frac{3\pi}{8} + 1$$
$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 + 2x^2 \cos\frac{3\pi}{8}$$
$$= (x^2+1)^2 - 2x^2\left(1 - \cos\frac{3\pi}{8}\right)$$
$$= (x^2+1)^2 - 4x^2\left(\sin\frac{3\pi}{16}\right)^2$$
$$= \left(x^2 - 2x\sin\frac{3\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\sin\frac{3\pi}{16} + 1\right)$$
$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{5\pi}{16} + 1\right)$$

Mối liên hệ trong các biểu diễn kết quả của I_4, I_8, I_{16} nếu như quả thật có tồn tại thì ta hoàn toàn có quyền đưa ra dự đoán:

$$I_{16} = \int \frac{dx}{x^{16}+1}$$
$$= \frac{1}{16}\left[\eta\left(\sin\frac{\pi}{16}\right) + \eta\left(\sin\frac{3\pi}{16}\right) + \eta\left(\sin\frac{5\pi}{16}\right) + \eta\left(\sin\frac{7\pi}{16}\right)\right] + const$$

$$= \frac{1}{16}\left[\eta\left(\cos\frac{\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{5\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{7\pi}{16}\right)\right] + const$$

Và một khi đã dự đoán được kết quả của một nguyên hàm mà ta không muốn tính toán trực tiếp, chúng ta có thể chứng minh cho dự đoán bằng cách lấy đạo hàm kết quả, một công đoạn giống như là phép thử lại cho việc tính nguyên hàm. Do đó, tựa đề của phần này là "Tính nguyên hàm bằng đạo hàm"!

Như vậy, để chứng minh cho nhận định trên, cũng như để nhất quán với nguyên hàm tổng quát sẽ được xét đến trong phần sau của tập chuyên luận, chúng ta có thể xây dựng một hàm số theo biến x như sau:

$$F_{16}(x) = \frac{1}{16}\left[\eta\left(\cos\frac{\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{5\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{7\pi}{16}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{3}\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}}\right.$$
$$\left. + \ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}+1}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2\left[\frac{1}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}}\ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}+1}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}+1}\right)\right]$$

Thực hiện lấy đạo hàm đối với $F_{16}(x)$, cũng chính vì công đoạn lấy đạo hàm này nên trong biểu diễn của hàm $F_{16}(x)$ ở trên ta có thể không cần phải đề cập đến hằng số tích phân.

$$F_{16}'(x) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2\left[\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2}\right.$$
$$\left. - \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1+\left(4\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2-2\right)x^2}\right.$$
$$\left.-\frac{x^2-1}{x^4+1+\left(2-4\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2\right)x^2}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{(2k+1)\pi}{8}}\right.$$
$$\left.-\frac{x^2-1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{(2k+1)\pi}{8}}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\cos\frac{\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{\pi}{8}}-\frac{x^2-1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{\pi}{8}}\right]\right.$$
$$+\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}-\frac{x^2-1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}\right]$$
$$+\left(\cos\frac{5\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{5\pi}{8}}-\frac{x^2-1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{5\pi}{8}}\right]$$
$$\left.+\left(\cos\frac{7\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{7\pi}{8}}-\frac{x^2-1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{7\pi}{8}}\right]\right\}$$

Với những tính chất lượng giác

$$\begin{cases}(\cos\theta)^2 = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)^2\\ \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta\end{cases}$$

Ta tiếp tục thực hiện biến đổi cho đạo hàm của $F_{16}(x)$ như sau

$$F_{16}'(x) = \frac{1}{4}\left\{\left(\cos\frac{\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{1-x^2}{x^4+1-2x^2\cos\frac{\pi}{8}}\right]\right.$$

$$+\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{3\pi}{8}} + \frac{1-x^2}{x^4+1-2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}\right]$$

$$+\left(\sin\frac{3\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{3\pi}{8}} + \frac{1-x^2}{x^4+1+2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}\right]$$

$$\left.+\left(\sin\frac{\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{1-x^2}{x^4+1+2x^2\cos\frac{\pi}{8}}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\left(\cos\frac{\pi}{16}\right)^2(x^2+1) + \left(\sin\frac{\pi}{16}\right)^2(1-x^2)}{x^4+1+2x^2\cos\frac{\pi}{8}}\right.$$

$$+\frac{\left(\cos\frac{\pi}{16}\right)^2(1-x^2) + \left(\sin\frac{\pi}{16}\right)^2(x^2+1)}{x^4+1-2x^2\cos\frac{\pi}{8}}$$

$$+\frac{\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right)^2(x^2+1) + \left(\sin\frac{3\pi}{16}\right)^2(1-x^2)}{x^4+1+2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}$$

$$\left.+\frac{\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right)^2(1-x^2) + \left(\sin\frac{3\pi}{16}\right)^2(x^2+1)}{x^4+1-2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1+x^2\cos\frac{\pi}{8}}{x^4+1+2x^2\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{1-x^2\cos\frac{\pi}{8}}{x^4+1-2x^2\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{1+x^2\cos\frac{3\pi}{8}}{x^4+1+2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}\right.$$

$$\left.+\frac{1-x^2\cos\frac{3\pi}{8}}{x^4+1-2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}\right]$$

Trong biến đổi trên, ta đã tận dụng các tính chất lượng giác

$$\begin{cases} (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1 \\ (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) \end{cases}$$

Trở lại với $F_{16}'(x)$, ta tiếp tục biến đổi

$$F'_{16}(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{\pi}{8}}\right.$$

$$+ x^2\cos\frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{\pi}{8}}\right)$$

$$+ \frac{1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{3\pi}{8}} + \frac{1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}$$

$$\left. + x^2\cos\frac{3\pi}{8}\left(\frac{1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{3\pi}{8}} - \frac{1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2(x^4+1)}{x^8+1-2x^4\cos\frac{\pi}{4}} - \frac{4x^4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{x^8+1-2x^4\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{2(x^4+1)}{x^8+1-2x^4\cos\frac{3\pi}{4}}\right.$$

$$\left. - \frac{4x^4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{x^8+1-2x^4\cos\frac{3\pi}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4+1}{x^8+1-2x^4\cos\frac{\pi}{4}} - \frac{2x^4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{x^8+1-2x^4\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{x^4+1}{x^8+1+2x^4\cos\frac{\pi}{4}}\right.$$

$$\left. - \frac{2x^4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{x^8+1+2x^4\cos\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4+1-2x^4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{x^8+1-2x^4\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{x^4+1-2x^4\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2}{x^8+1+2x^4\cos\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x^4+1)\left(\frac{1}{x^8-\sqrt{2}x^4+1} + \frac{1}{x^8+\sqrt{2}x^4+1}\right)\right.$$

$$\left. - 2x^4\left(\frac{\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{x^8-\sqrt{2}x^4+1} + \frac{\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2}{x^8+\sqrt{2}x^4+1}\right)\right]$$

$$F_{16}'(x)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2(x^4+1)(x^8+1)}{x^{16}+1} - \frac{2x^4\left(\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2\left(x^8+\sqrt{2}x^4+1\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2\left(x^8-\sqrt{2}x^4+1\right)\right)}{x^{16}+1}\right]$$

$$F_{16}'(x) = \frac{(x^4+1)(x^8+1) - x^4(x^8+1) - \sqrt{2}x^8\left[\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 - \left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2\right]}{x^{16}+1}$$

$$F_{16}'(x) = \frac{x^8+1-\sqrt{2}x^8\left[\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 - \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2\right]}{x^{16}+1}$$

$$F_{16}'(x) = \frac{x^8+1-\sqrt{2}x^8\cos\frac{\pi}{4}}{x^{16}+1}$$

$$F_{16}'(x) = \frac{1}{x^{16}+1}$$

Chúng ta đã chứng minh được

$$F_{16}'(x) = \frac{1}{x^{16}+1}$$

Như vậy, từ đó suy ra

$$I_{16} = \int \frac{dx}{x^{16}+1} = F_{16}(x) + const$$

Hay có thể biểu diễn một cách đầy đủ:

$$I_{16} = \int \frac{dx}{x^{16}+1}$$
$$= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{3}\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}+1}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}+1}\right)\right] + const$$

Và một quy luật dần được hé mở khi mà:

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{4}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{\pi}{4}+1}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{4}+1}\right)\right] + const$$

Thực ra, trong cách biểu diễn trên của nguyên hàm I_4, ta vẫn có thể thêm vào ký hiệu dấu lấy tổng. Tuy nhiên, đó là tổng chạy từ $k=0$ đến $k=0$, tổng này chỉ có một số hạng nên việc thêm vào dấu lấy tổng sẽ không có ý nghĩa.

Đối với nguyên hàm I_8, thì ta lại có thể thêm vào dấu lấy tổng, đó là một tổng gồm hai số hạng chạy từ $k=0$ đến $k=1$.

$$\begin{aligned} I_8 &= \int \frac{dx}{x^8+1} \\ &= \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{1}\cos\frac{(2k+1)\pi}{8}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{8}}\right. \\ &\qquad \left. + \ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{8}+1}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{8}+1}\right)\right] + const \end{aligned}$$

Còn đối với nguyên hàm I_{16}, biểu diễn kết quả của nó là một tổng gồm bốn số hạng, chạy từ $k=0$ đến $k=3$.

$$\begin{aligned} I_{16} &= \int \frac{dx}{x^{16}+1} \\ &= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{3}\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}}\right. \\ &\qquad \left. + \ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}+1}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}+1}\right)\right] + const \end{aligned}$$

Như vậy ta cũng có thể dự đoán và chứng minh cho kết quả các nguyên hàm $I_{32}, I_{64}, I_{128}\ldots$, và cho bài toán nguyên hàm tổng quát có dạng:

$$\int \frac{dx}{1+x^{2^n}} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

6. $\mathbf{N = 2^n}$: Bản Giao hưởng số $\mathbf{2^n}$

Từ kết quả của các nguyên hàm I_4, I_8, và I_{16} trong những phần trước, chúng ta đi ngay đến việc dự đoán kết quả của bài toán tổng quát, đó là:

$$I_{2^n} = \int \frac{dx}{1+x^{2^n}}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}\right)\right]\right\}+const$$

Có lẽ một vài phân tích sẽ làm rõ vì sao $2^{n-2}-1$ lại xuất hiện phía bên trên dấu lấy tổng.

Đầu tiên là phân tích thành nhân tử đối với mẫu thức dưới dấu tích phân của nguyên hàm I_{2^n} tổng quát. Mở rộng sang trường số phức sẽ giúp cho việc này được thực hiện một cách dễ dàng, ta có:

$$x^{2^n}+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^{2^n}=-1$$

$$\Leftrightarrow x^{2^n}=\cos\pi+i\sin\pi$$

Trong đó i là đơn vị ảo với $i^2=-1$. Gọi ω (với $\omega\in\mathbb{C}$) là số thỏa $\omega^{2^n}=-1$. Ta sẽ được:

$$\omega_k=\cos\frac{\pi+k2\pi}{2^n}+i\sin\frac{\pi+k2\pi}{2^n}\quad (k=\overline{0;2^n-1})$$

Hay

$$\omega_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\quad (k=\overline{0;2^n-1})$$

Từ đó, ta cũng suy ra được:

$$\omega_{2^n-1-k}=\cos\frac{[2(2^n-1-k)+1]\pi}{2^n}+i\sin\frac{[2(2^n-1-k)+1]\pi}{2^n}$$

$$\omega_{2^n-1-k}=\cos\frac{(2^{n+1}-1-2k)\pi}{2^n}+i\sin\frac{(2^{n+1}-1-2k)\pi}{2^n}$$

$$\omega_{2^n-1-k}=\cos\left[2\pi-\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right]+i\sin\left[2\pi-\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right]$$

$$\omega_{2^n-1-k} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} - i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}$$

Như vậy, biểu diễn của ω_k và ω_{2^n-1-k} sẽ đưa đến hệ quả:

$$\begin{cases} \omega_k + \omega_{2^n-1-k} = 2\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2^n} \\ \omega_k\omega_{2^n-1-k} = \left[\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2^n}\right]^2 + \left[\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2^n}\right]^2 = 1 \end{cases} \quad (k = \overline{0; 2^n-1})$$

Theo định lý Vieta, ω_k và ω_{2^n-1-k} là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1 = 0$$

Như vậy, ta phân tích được:

$$x^{2^n} + 1 = \prod_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left[x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1\right]$$

Trong phân tích đa thức thành nhân tử đối với $x^{2^n}+1$ chạy từ $k=0$ đến $k = 2^n - 1$, có tất cả 2^n giá trị. Trong số 2^n giá trị này, ta chọn k bất kỳ, rồi xác định $2^n - 1 - k$. Do đó, bất kể giá trị k ban đầu trong đoạn từ $k = 0$ đến $k = 2^{n-1} - 1$, hay trong đoạn từ $k = 2^{n-1}$ đến $k = 2^n - 1$ (lấy k trong nửa đầu hoặc nửa sau của 2^n giá trị), thì kết quả của việc xác định k và $2^n - 1 - k$ vẫn không đổi, điều này tựa như tính chất $C_n^k = C_n^{n-k}$ vậy. Đây chính là *Định đề Đối xứng với 2^n phần tử*. Trong hệ thức trên thì ta đã chọn k rơi vào nửa đầu, nên việc lập tích bao gồm các giá trị của k chạy từ phần tử $k = 0$ đến phần tử $k = 2^{n-1} - 1$.

Ngoài ra, nếu như đặt

$$\mathrm{P}_k(x) = x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1 \quad (k = \overline{0; 2^n-1})$$

Thì ta cũng có:

$$\mathrm{P}_{2^{n-1}-1-k}(x) = x^2 - 2x\cos\frac{[2(2^{n-1}-1-k)+1]\pi}{2^n} + 1$$

$$\mathrm{P}_{2^{n-1}-1-k}(x) = x^2 - 2x\cos\frac{(2^n-1-2k)\pi}{2^n} + 1$$

$$\mathrm{P}_{2^{n-1}-1-k}(x) = x^2 - 2x\cos\left[\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right] + 1$$

$$P_{2^{n-1}-1-k}(x) = x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1$$

Và một lần nữa, áp dụng *Định đề Đối xứng với* 2^{n-1} *phần tử*, trong 2^{n-1} giá trị chạy từ $k = 0$ đến $k = 2^{n-1} - 1$, việc xác định k và $2^{n-1} - 1 - k$ sẽ không phụ thuộc vào vị trí giá trị ban đầu của k nằm ở nửa đầu hay nửa sau của 2^{n-1} giá trị này. Do đó, khi k nằm ở nửa đầu (tức là từ $k = 0$ đến $k = 2^{n-2} - 1$) thì có thể biểu diễn (6.1) lại như sau:

$$x^{2^n} + 1 = \prod_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left[x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1\right]\left[x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1\right]$$

Cách biểu diễn này phần nào đó đã nhắm vào hệ số $2^{n-2} - 1$ phía trên dấu lấy tổng đã xuất hiện ở đầu phần 6.

Tiếp theo đây, một nhận xét nữa sẽ càng làm rõ hơn tại sao trong kết quả được dự đoán cho nguyên hàm dạng tổng quát I_{2^n} giá trị $2^{n-2} - 1$ lại xuất hiện.

Kết quả các nguyên hàm I_4, I_8, I_{16}, có thể được biểu diễn như sau:

Với

$$\eta(t) = t\left[2\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2t} + \ln\left(\frac{x^2 + 2xt + 1}{x^2 - 2xt + 1}\right)\right]$$

Trong đó $\eta(t)$ là một hàm theo biến t.

Thì

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^4 + 1}$$
$$= \frac{1}{4}\eta\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) + const$$
$$= \frac{1}{4}\eta\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + const$$

Và

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8 + 1}$$
$$= \frac{1}{8}\left[\eta\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) + \eta\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)\right] + const$$
$$= \frac{1}{8}\left[\eta\left(\cos\frac{\pi}{8}\right) + \eta\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)\right] + const$$

Cũng như

$$I_{16} = \int \frac{dx}{x^{16}+1}$$
$$= \frac{1}{16}\left[\eta\left(\sin\frac{\pi}{16}\right) + \eta\left(\sin\frac{3\pi}{16}\right) + \eta\left(\sin\frac{5\pi}{16}\right) + \eta\left(\sin\frac{7\pi}{16}\right)\right] + const$$
$$= \frac{1}{16}\left[\eta\left(\cos\frac{\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{5\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{7\pi}{16}\right)\right] + const$$

Điều này dẫn đến dự đoán cho kết quả của bài toán tính nguyên hàm tổng quát:

$$I_{2^n} = \int \frac{dx}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k_0} \eta(\sin\alpha_k) + C = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k_0} \eta(\cos\alpha_k) + const$$

Với α_k là bội góc lẻ của cung $\frac{\pi}{2^n}$ và α_k không vượt quá cung $\frac{\pi}{2}$. Mà rõ ràng, cung $\frac{\pi}{2}$ lại là một bội góc chẵn của cung $\frac{\pi}{2^n}$, nên nếu như đặt $\alpha_k = \frac{(2k+1)\pi}{2^n}$ thì ngoài một điều chắc chắn $k \geq 0$, ta còn phải có:

$$\alpha_k = \frac{(2k+1)\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2k+1 < 2^{n-1}$$

Do $k \in \mathbb{N}$ nên nếu như muốn tìm giá trị k_0 tốt nhất sao cho $k \leq k_0$ (hay nói cách khác, k_0 chính là chặn trên của việc lấy tổng, thì ta bắt buộc phải có:

$$2k_0 + 1 = 2^{n-1} - 1$$
$$\Leftrightarrow 2k_0 = 2^{n-1} - 2$$
$$\Leftrightarrow k_0 = 2^{n-2} - 1$$

Hay giá trị chặn trên của việc lấy tổng là:

$$k = k_0 = 2^{n-2} - 1$$

Điều này một lần nữa lý giải vì sao kết quả dự đoán ở đầu Phần 6 là một tổng gồm hữu hạn các giá trị chạy từ $k = 0$ đến $k = 2^{n-2} - 1$. Ngoài ra, vì giá trị nằm ở dưới dấu lấy tổng bắt buộc không được vượt quá giá trị nằm ở trên dấu lấy tổng, nên ta có thể suy ra được kết quả được dự đoán cho nguyên hàm tổng quát I_{2^n} sẽ đúng với:

$$2^{n-2} - 1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow n \geq 2$$

BẢN GIAO HƯỞNG SỐ 2^n

6.1. Molto Allegro

Chúng ta đã có được một dự đoán logic, đó là:

$$I_{2^n} = \int \frac{dx}{1+x^{2^n}}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \left\{ \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} \left[2\tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1} \right) \right] \right\} + const \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

Việc còn lại, đó là phải chứng minh rằng dự đoán này là đúng.

Điểm lại một số phương pháp đã sử dụng trong những phần trước, đó là:

(i) Cân bằng hệ số;

(ii) Phân tích I;

(iii) Phân tích II;

(iv) Tổng-Hiệu; và

(v) Tính nguyên hàm bằng đạo hàm.

Nguyên hàm I_4 trong phần 2 thì có tới ba, bốn phương pháp để tính. Sang tới phần 4 với nguyên hàm I_8 thì ta áp dụng tất cả các phương pháp ấy vào. Riêng chương 5 thì ta phải sử dụng một phương pháp mới. Khi giá trị của n càng lớn thì chúng ta càng có ít hướng để giải quyết bài toán, thậm chí phải cố gắng tìm kiếm con đường mới. Và theo quy luật đó, dĩ nhiên khi muốn chứng minh một kết quả cho mọi giá trị nguyên $n \geq 2$, con đường đầu tiên mà chúng ta phải đi vào chính là con đường mới nhất-Tính nguyên hàm bằng đạo hàm.

Nhìn lại phần 5, ngay sau khi lấy đạo hàm đối với hàm số $F_{16}(x)$, chúng ta có một bước thay đổi vị trí để được những mẫu thức giống nhau. Ở bước này, trong phần 5 chỉ có 8 phân thức nên việc đổi chỗ có lẽ vẫn còn dễ thấy, nhưng nếu như có đến $2n$ phân thức như phần 6 (mà chúng ta cũng không thể biết chính xác $2n$ là bao nhiêu) thì nhất thiết là phải đổi chỗ trước khi lấy đạo hàm.

Việc đổi chỗ được thực hiện như thế nào là nhờ vào hai tích phân bất định sau, điều này cũng đã được đề cập trong phần 2, phần 3 và phần 4.

Ký hiệu:

$$I_4^+(\lambda) = \int \frac{x^2+1}{x^4+\lambda x^2+1}dx$$

$$I_4^-(\lambda) = \int \frac{x^2-1}{x^4+\lambda x^2+1}dx$$

Với λ là một số thực cho trước.

Chọn $\lambda = -2\cos\theta$, ta sẽ có:

$$I_4^+(-2\cos\theta) = \int \frac{x^2+1}{x^4-2x^2\cos\theta+1}dx$$

$$I_4^+(-2\cos\theta) = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-2\cos\theta}dx$$

$$I_4^+(-2\cos\theta) = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2-2\cos\theta}$$

$$I_4^+(-2\cos\theta) = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$I_4^+(-2\cos\theta) = \frac{1}{2}\csc\frac{\theta}{2}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{\theta}{2}}+const$$

Và

$$I_4^-(-2\cos\theta) = \int \frac{x^2-1}{x^4-2x^2\cos\theta+1}dx$$

$$I_4^-(-2\cos\theta) = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-2\cos\theta}dx$$

$$I_4^-(-2\cos\theta) = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 2\cos\theta}$$

$$I_4^-(-2\cos\theta) = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$I_4^-(-2\cos\theta) = \frac{1}{4}\sec\frac{\theta}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-2\cos\frac{\theta}{2}}{x+\frac{1}{x}+2\cos\frac{\theta}{2}}\right| + const$$

$$I_4^-(-2\cos\theta) = \frac{1}{4}\sec\frac{\theta}{2}\ln\left(\frac{x^2-2x\cos\frac{\theta}{2}+1}{x^2+2x\cos\frac{\theta}{2}+1}\right) + const$$

Trở lại với việc chứng minh kết quả được dự đoán cho nguyên hàm tổng quát I_{2^n} (n là số tự nhiên thỏa điều kiện $n \geq 2$), chúng ta xây dựng hàm $F_{2^n}(x)$ như sau:

$$F_{2^n}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}\right)\right]\right\} + const$$

Với

$$\alpha_k = \frac{(2k+1)\pi}{2^n} \quad \left(k = \overline{0; 2^{n-2}-1}\right)$$

Những giá trị α_k đều là bội góc lẻ của cung $\frac{\pi}{2^n}$ và không vượt quá cung $\frac{\pi}{2}$, cộng với tính chất $\cos\alpha_k = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_k\right)$, ta có nhận xét, cách biểu diễn của hàm $F_{2^n}(x)$ trong cách xây dựng ở trên vẫn không thay đổi nếu thay chữ "cos" bởi chữ "sin". Ngoài ra, với các kết quả hai nguyên hàm $I_4^+(-2\cos\theta)$ và $I_4^-(-2\cos\theta)$ vừa được trình bày ở trên thì ta sẽ biến đổi $F_{2^n}(x)$ bằng cách:

$F_{2^n}(x)$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \left[2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} + \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1} \right) \right] + const$$

$F_{2^n}(x)$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \left[2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n} \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} + \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} \ln\left| \frac{x + \frac{1}{x} + 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}{x + \frac{1}{x} - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} \right| \right] + const$$

$F_{2^n}(x)$

$$= \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \left[\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)^2 \csc\frac{(2k+1)\pi}{2^n} \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} + \frac{1}{4}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)^2 \sec\frac{(2k+1)\pi}{2^n} \ln\left| \frac{x + \frac{1}{x} + 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}{x + \frac{1}{x} - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} \right| \right] + const$$

Chương 1-*Molto Allegro* của *Bản Giao hưởng số* 2^n xin kết thúc ở đây. Và kế tiếp, chúng ta sẽ đến với Chương 2-*Andante*, nơi việc lấy đạo hàm cho $F_{2^n}(x)$ được bắt đầu tiến hành trên con đường đi tìm đáp án cho bài toán tích phân bất định dạng tổng quát.

6.2. Andante

Với

$$F_{2^n}(x)$$
$$= \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \left[\frac{1}{2} \left(\sin \frac{(2k+1)\pi}{2^n} \right)^2 \csc \frac{(2k+1)\pi}{2^n} \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{2 \sin \frac{(2k+1)\pi}{2^n}} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2^n} \right)^2 \sec \frac{(2k+1)\pi}{2^n} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} + 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^n}}{x + \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^n}} \right| \right] + const$$

Ta suy ra được:

$$F'_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \left[\left(\sin \frac{(2k+1)\pi}{2^n} \right)^2 \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 \left(\sin \frac{(2k+1)\pi}{2^n} \right)^2} \right.$$
$$\left. + \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2^n} \right)^2 \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2^n} \right)^2} \right]$$

$$F'_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \left[\left(\sin \frac{(2k+1)\pi}{2^n} \right)^2 \frac{(x^2+1)}{x^4 + 1 - 2x^2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} \right.$$
$$\left. + \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2^n} \right)^2 \frac{(1-x^2)}{x^4 + 1 - 2x^2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} \right]$$

$$F'_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \frac{1 - x^2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}}{x^4 + 1 - 2x^2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}}$$

Từ các thành phần $\frac{(2k+1)\pi}{2^n}$, sau khi lấy đạo hàm và biến đổi bước đầu tiên, ta thấy xuất hiện các thành phần $\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}$.

Ở đây, nếu như đặt

$$\beta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}} \quad \left(k = \overline{0; 2^{n-2} - 1}\right)$$

Thì ta sẽ có

$$\beta_{2^{n-2}-1-k} = \frac{[2(2^{n-2}-1-k)+1]\pi}{2^{n-1}}$$

$$\beta_{2^{n-2}-1-k} = \frac{(2^{n-1}-1-2k)\pi}{2^{n-1}}$$

$$\beta_{2^{n-2}-1-k} = \pi - \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}$$

$$\beta_{2^{n-2}-1-k} = \pi - \beta_k$$

Từ đó, chúng ta sẽ có được:

$$\cos(\beta_{2^{n-2}-1-k}) = -\cos\beta_k$$

Lại một lần nữa, áp dụng *Định đề Đối xứng với* 2^{n-2} *phần tử,* việc chọn giá trị k rồi xác định $2^{n-2}-1-k$ trong tổng số 2^{n-2} giá trị mà k có thể nhận được không phụ thuộc vào vị trí của k nằm ở nửa đầu hay là nửa sau của chuỗi gồm 2^{n-2} giá trị này. Nửa đầu của chuỗi gồm các giá trị chạy từ $k=0$ cho đến $k=2^{n-3}-1$, và tất nhiên nửa sau gồm các giá trị chạy từ $k=2^{n-3}$ cho đến $k=2^{n-2}-1$.

Chúng ta tiếp tục thực hiện biến đổi:

$$F'_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} \left[\frac{1 - x^2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}}{x^4+1-2x^2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} + \frac{1 + x^2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}}{x^4+1+2x^2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} \right]$$

$$F'_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} \left[\frac{1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} + \frac{1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} + x^2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} - \frac{1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} \right) \right]$$

$$F'_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} \frac{2(x^4+1) - 4x^4\left(\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}\right)^2}{x^8 + 1 - 2x^4\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n-2}}}$$

$$F'_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n-3}} \sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} \frac{1 + x^4\left[1 - 2\left(\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}\right)^2\right]}{x^8 + 1 - 2x^4\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n-2}}}$$

$$F'_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n-3}} \sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} \frac{1 - x^4\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n-2}}}{x^8 + 1 - 2x^4\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n-2}}} \quad (6.3)$$

Sau khi biến đổi đạo hàm lần thứ hai, phép tính xuất hiện các thành phần sau:

$$\gamma_k = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-2}} \quad \left(k = \overline{0; 2^{n-3}-1}\right)$$

Tất nhiên là chúng ta sẽ không biến đổi tới n lần để được kết quả cuối cùng, mà nếu có muốn biến đổi cũng không được, vì ta đâu có biết chính xác n là bao nhiêu, chỉ biết được n là một số tự nhiên lớn hơn 1, thế thôi! Nếu vậy phải làm thế nào đây? Khi nhìn lại tính toán ở trên thì ta cũng có chút động lực để biến đổi lần thứ ba, lần thứ tư, lần thứ năm… Nhưng đến khi nào thi phép chứng minh cho bài toán tổng quát mới kết thúc? Điều này sẽ được đề cập ngay sau đây, trong Chương 3-*Menuetto* của Bản Giao hưởng.

6.3. Menuetto

Sau khi quan sát thật kỹ những phép tính đã thực hiện trong Phần 6.2, chúng ta tìm thấy một hướng đi mới. Thật vậy, nếu như xây dựng một hàm $\Psi_m(x)$ (đây là hàm theo biến x) như sau:

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{2^{n-m}} \sum_{k=0}^{2^{n-m}-1} \frac{1 - x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}{x^{2^m} + 1 - 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}$$

Sau khi hàm $\Psi_m(x)$ được xác định, ta có thể biểu diễn phép toán như thế này:

$$F'_{2^n}(x) = \Psi_2(x) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \frac{1 - x^2 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}}{x^4 + 1 - 2x^2 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}}$$

Cũng như

$$F'_{2^n}(x) = \Psi_3(x) = \frac{1}{2^{n-3}} \sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} \frac{1 - x^4 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-2}}}{x^8 + 1 - 2x^4 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-2}}}$$

Một tính chất quan trọng được phát hiện ở đây, đó là:

$$F'_{2^n}(x) = \Psi_2(x) = \Psi_3(x)$$

Trước khi khai thác tính chất này, ta nên thực hiện thao tác chặn giá trị m lại. Theo đó:

$$\begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ m \geq 2 \\ 2^{n-m} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ m \geq 2 \\ 2^{n-m} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ m \geq 2 \\ n - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ m \geq 2 \\ m \leq n \end{cases}$$

Điều kiện này cũng có thể được phát biểu: "m là một số tự nhiên chen vào giữa 2 và n", với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$ chính là điều kiện ban đầu của bài toán tích phân bất định dạng tổng quát hóa.

Bởi vì

$$\Psi_2(x) = \Psi_3(x)$$

Nên sẽ xuất hiện ngay một câu hỏi về mối liên hệ giữa $\Psi_m(x)$ và $\Psi_{m+1}(x)$. Nếu mối liên hệ này quả thực có tồn tại thì nó sẽ là mảnh ghép cuối cùng của chiếc chìa khóa cho bài toán nguyên hàm dạng tổng quát được đề cập đến xuyên suốt trong tập chuyên luận này.

Với cách xác định $\Psi_m(x)$ như trên thì $\Psi_{m+1}(x)$ sẽ được biểu diễn:

$$\Psi_{m+1}(x) = \frac{1}{2^{n-m-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} \frac{1 - x^{2^m} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m}}}{x^{2^{m+1}} + 1 - 2x^{2^m} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m}}}$$

Nếu như muốn chứng minh

$$\Psi_m(x) = \Psi_{m+1}(x)$$

Thì điều kiện của m cần được điều chỉnh lại thành:

$$\begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ 2 \le m < n \end{cases}$$

Về các thành phần cung lượng giác trong biểu diễn của $\Psi_m(x)$, ta sẽ ký hiệu:

$$\phi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}} \quad (k = \overline{0; 2^{n-m} - 1})$$

Mà theo đó thì:

$$\phi_{2^{n-m}-1-k} = \frac{[2(2^{n-m} - 1 - k) + 1]\pi}{2^{n-m+1}}$$

$$\phi_{2^{n-m}-1-k} = \frac{(2^{n-m+1} - 1 - 2k)\pi}{2^{n-m+1}}$$

$$\phi_{2^{n-m}-1-k} = \pi - \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}$$

$$\phi_{2^{n-m}-1-k} = \pi - \phi_k$$

Do vậy:

$$\cos(\phi_{2^{n-m}-1-k}) = -\cos\phi_k$$

Lại một lần nữa, áp dụng *Định đề Đối xứng với* 2^{n-m} *phần tử*, trong 2^{n-m} giá trị khả thi mà k có thể nhận được, việc chọn k và $2^{n-m} - 1 - k$ không phụ thuộc vào trí của k nằm ở nửa đầu hay nửa sau của 2^{n-m} giá trị này. Với nửa đầu tức là k chạy từ $k = 0$ đến $k = 2^{n-m-1} - 1$, còn nửa sau của chuỗi gồm các giá trị của k chạy từ $k = 2^{n-m-1}$ đến $k = 2^{n-m} - 1$.

Như vậy, để chứng minh cho mối liên hệ giữa $\Psi_m(x)$ và $\Psi_{m+1}(x)$, chúng ta có thể thực hiện biến đổi:

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{2^{n-m}} \sum_{k=0}^{2^{n-m}-1} \frac{1 - x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}{x^{2^m} + 1 - 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}$$

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{2^{n-m}} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} \left[\frac{1 - x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}{x^{2^m} + 1 - 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}} + \frac{1 + x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}{x^{2^m} + 1 + 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}} \right]$$

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{2^{n-m}} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} \left[\frac{1}{x^{2^m} + 1 - 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}} + \frac{1}{x^{2^m} + 1 + 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}} + x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}} \left(\frac{1}{x^{2^m} + 1 + 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}} - \frac{1}{x^{2^m} - 1 + 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}} \right) \right]$$

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{2^{n-m}} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} \frac{2\left(x^{2^{m+1}} + 1\right) - 4x^{2^m} \left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}\right)^2}{x^{2^{m+1}} + 1 - 2x^{2^m} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m}}}$$

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{2^{n-m-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} \frac{1 + x^{2^m} \left[1 - 2\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}\right)^2\right]}{x^{2^{m+1}} + 1 - 2x^{2^m} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m}}}$$

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{2^{n-m-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} \frac{1 - x^{2^m} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m}}}{x^{2^{m+1}} + 1 - 2x^{2^m} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m}}}$$

$$\Psi_m(x) = \Psi_{m+1}(x)$$

Như vậy, ta đã chứng minh được

$$\Psi_m(x) = \Psi_{m+1}(x) \quad \forall m: \begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ 2 \le m < n \end{cases}$$

Điều này là hết sức quan trọng. Tuy $\Psi_m(x)$ là một hàm theo biến x nhưng ta lại tìm ra được tính chất truy hồi của nó theo m. Và nó đưa đến kết luận:

$$F'_{2^n}(x) = \Psi_2(x) = \Psi_3(x) = \cdots = \Psi_{n-1}(x) = \Psi_n(x) \quad \forall n: \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases}$$

Kế tiếp chỉ cần xác định $\Psi_n(x)$ là phép chứng minh coi như hoàn thành.

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{2^{n-n}} \sum_{k=0}^{2^{n-n}-1} \frac{1 - x^{2^{n-1}} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-n+1}}}{x^{2^n} + 1 - 2x^{2^{n-1}} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-n+1}}}$$

$$\Psi_n(x) = \sum_{k=0}^{0} \frac{1 - x^{2^{n-1}} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2}}{x^{2^n} + 1 - 2x^{2^{n-1}} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2}}$$

$$\Psi_n(x) = \frac{1 - x^{2^{n-1}} \cos \frac{\pi}{2}}{x^{2^n} + 1 - 2x^{2^{n-1}} \cos \frac{\pi}{2}}$$

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{x^{2^n} + 1}$$

Như vậy:

$$F'_{2^n}(x) = \Psi_n(x) = \frac{1}{x^{2^n} + 1} \quad \forall n: \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases}$$

Lấy nguyên hàm theo biến x vế thứ nhất và vế thứ ba của đẳng thức kép trên, ta được:

$$F_{2^n}(x) = \int \frac{dx}{x^{2^n} + 1} \quad \forall n: \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases}$$

Ta đã hoàn tất phần chứng minh cho bài toán nguyên hàm dạng tổng quát, phép chứng minh quyết định sử dụng thủ thuật không mấy phức tạp, nhưng quả thật không dễ để tìm thấy nó. Và đến đây thì Chương 3-*Menuetto* của Bản Giao hưởng xin được khép lại, phần kết luận của bài toán tổng quát sẽ được trình bày ngay sau đây trong phần kế tiếp-Chương 4-*Allegro assai*, cũng là chương cuối của *Bản Giao hưởng số* 2^n.

6.4. *Allegro assai*

Ta đã chứng minh được

$$F_{2^n}(x) = \int \frac{dx}{x^{2^n}+1} \quad \forall n: \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases}$$

Như vậy

$$I_{2^n} = \int \frac{dx}{1+x^{2^n}}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}\right)\right]\right\} + const \quad (n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$$

Đây là một kết quả khá đẹp, và ta cũng có thể biểu diễn thành

$$I_{2^n} = \int \frac{dx}{1+x^{2^n}}$$

$$I_{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}\right)\right]\right\} + const$$

$$I_{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left[2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} + \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}\right)\right] + const$$

$$I_{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left[2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} + \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}+2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}{x+\frac{1}{x}-2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}\right|\right] + const$$

Cách biểu diễn này thậm chí còn đẹp mắt hơn vì có những thành phần lượng giác $\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}$ và $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}$.

Và để cho gọn hơn, chúng ta có thể đặt các hàm:

$$\begin{cases} f_{(\theta)}(x) = 2\tan^{-1}\dfrac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\theta} \\ g_{(\theta)}(x) = \ln\left|\dfrac{x+\frac{1}{x}+2\cos\theta}{x+\frac{1}{x}-2\cos\theta}\right| \end{cases}$$

Thì kết quả của nguyên hàm tổng quát I_{2^n} $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$I_{2^n} = \int \frac{dx}{1+x^{2^n}}$$

$$I_{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left[\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n} f_{\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)}(x) + \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} g_{\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)}(x)\right] + const$$

Nhìn lại thì kết quả cho bài toán nguyên hàm cũng như phép chứng minh cho nó khá là “mãn nhãn”. Tưởng như việc biến đổi sẽ không bao giờ kết thúc thì một nhân tố mới xuất hiện, đó là hàm $\Psi_m(x)$. Chính hệ thức truy hồi liên hệ giữa m và $m+1$ $\Psi_m(x) = \Psi_{m+1}(x)$ được chứng minh sau đó giúp chúng ta đi đến mục tiêu cuối cùng.

Thú vị ở chỗ, $\Psi_m(x)$ là một hàm theo biến x, thế nhưng chìa khóa lại nằm ở m. Dường như chúng ta đã “đổi biến” từ x sang m để chứng minh hệ thức truy hồi. Dù rằng phương pháp đổi biến được sử dụng rất nhiều trong tập chuyên luận này, thế nhưng chính động tác “đổi biến” từ x sang m mới là bước quyết định cho phép chứng minh. Hệ thức truy hồi khiến cho bài toán tổng quát tới n giống như được quy nạp. Như vậy bài toán tích phân bất định dạng tổng quát suy cho cùng là được chứng minh bằng phương pháp “đổi biến” và “quy nạp”.

Và đến đây *Bản Giao hưởng số* 2^n xin được kết thúc.

7. Trường hợp tổng quát: $\mathbf{N = 2s + 1}$ ($\mathbf{s} \in \mathbb{N}^+$)

Phần này thảo luận về nguyên hàm tổng quát I_{2s+1}:

$$I_{2s+1} = \int \frac{dx}{x^{2s+1} + 1} \quad (s \in \mathbb{N}^+)$$

Trong Phần giới thiệu, ta đã có phép tính nguyên hàm I_3:

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3}\left(\int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{-x + 2}{x^2 - x + 1} dx\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{-2x\cos\frac{\pi}{3} + 2}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{3} + 1} dx\right)$$

Cũng như phép tính phép tính nguyên hàm I_5 được trình bày trong Phần 3.2:

$$I_5 = \int \frac{dx}{x^5 + 1}$$
$$= \frac{1}{5}\left(\int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{-x^3 + 2x^2 - 3x + 4}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1} dx\right)$$
$$= \frac{1}{5}\left(\int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{-2x\cos\frac{\pi}{5} + 2}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{5} + 1} dx + \int \frac{-2x\cos\frac{3\pi}{5} + 2}{x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{5} + 1} dx\right)$$

Dựa vào phép tính của I_3 và I_5, ta xây dựng dự đoán cho I_{2s+1} như sau:

$$I_{2s+1} = \int \frac{dx}{x^{2s+1} + 1}$$
$$= \frac{1}{2s + 1}\left(\int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{\sum_{p=0}^{2s-1}(-1)^p(2s - p)x^p}{\sum_{q=0}^{2s}(-1)^q x^q} dx\right)$$
$$= \frac{1}{2s + 1}\left(\int \frac{dx}{x + 1} + \sum_{j=0}^{s-1} \int \frac{-2x\cos\frac{(2j + 1)\pi}{2s + 1} + 2}{x^2 - 2x\cos\frac{(2j + 1)\pi}{2s + 1} + 1} dx\right)$$

Như vậy, ta cần phải chứng minh *đẳng thức* $2s + 1$ sau đây:

$$\frac{1}{x + 1} + \sum_{j=0}^{s-1} \frac{-2x\cos\frac{(2j + 1)\pi}{2s + 1} + 2}{x^2 - 2x\cos\frac{(2j + 1)\pi}{2s + 1} + 1} = \frac{2s + 1}{x^{2s+1} + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Trước khi chứng minh đẳng thức trên, việc phân tích thành nhân tử đối với $x^{2s+1} + 1$ sẽ được thảo luận một số điểm quan trọng. Gọi số phức ω_j là nghiệm của phương trình $x^{2s+1} + 1 = 0$. Như vậy:

$$\omega_j^{2s+1} = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$\Leftrightarrow \omega_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} + i\sin\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} \quad (j = \overline{0; 2s})$$

Với tính chất liên hợp của s cặp nghiệm phức trong $2s+1$ giá trị của ω_j:

$$\begin{aligned}\omega_{2s-j} &= \cos\frac{(4s-2j+1)\pi}{2s+1} + i\sin\frac{(4s-2j+1)\pi}{2s+1} \\ &= \cos\frac{[4s+2-(2j+1)]\pi}{2s+1} + i\sin\frac{[4s+2-(2j+1)]\pi}{2s+1} \\ &= \cos\left[2\pi - \frac{(2j+1)\pi}{2s+1}\right] + i\sin\left[2\pi - \frac{(2j+1)\pi}{2s+1}\right] \\ &= \cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} - i\sin\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}\end{aligned}$$

Do đó, $2s+1$ giá trị của ω_j có tính chất sau đây:

$$\begin{cases} \omega_j + \omega_{2s-j} = 2\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} \\ \omega_j\omega_{2s-j} = 1 \\ \omega_s = -1 \end{cases}$$

Như vậy,

$$x^2 - 2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 1 = (x - \omega_j)(x - \omega_{2s-j})$$

Và kết quả phân tích nhân tử tổng quát:

$$x^{2s+1} + 1 = \prod_{j=0}^{2s}(x - \omega_j)$$

Với hàm $L(\delta)$ đã được định nghĩa trong Phần 3.1:

$$L(\delta) = \int \frac{-2x\cos\delta + 2}{x^2 - 2x\cos\delta + 1}dx$$

Phương pháp cân bằng hệ số được sử dụng để tìm hai số thực A và B sao cho:

$$\frac{-2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 2}{x^2 - 2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 1} = \frac{A}{x - \omega_j} + \frac{B}{x - \omega_{2s-j}} \quad \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{\omega_j; \omega_{2s-j}\}$$

Dựa vào biến đổi đồng nhất thức, ta có:

$$A(x - \omega_{2s-j}) + B(x - \omega_j) \equiv -2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 2$$

$$\Leftrightarrow (A+B)x - \left(A\omega_{2s-j} + B\omega_j\right) \equiv -2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 2$$

Đồng nhất thức này dẫn đến hệ phương trình:

$$\begin{cases} A + B = -2\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{2s+1} \\ A\omega_{2s-j} + B\omega_j = -2 \end{cases} \Leftrightarrow (A;B) = \left(-\omega_j; -\omega_{2s-j}\right)$$

Trở lại với việc chứng minh *đẳng thức* $2s+1$, ta có:

$$\frac{1}{x+1} + \sum_{j=0}^{s-1} \frac{-2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 2}{x^2 - 2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 1}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \sum_{j=0}^{s-1} \frac{-2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 2}{\left(x-\omega_j\right)\left(x-\omega_{2s-j}\right)}$$

$$= \frac{-\omega_s}{x-\omega_s} + \sum_{j=0}^{s-1}\left(\frac{-\omega_j}{x-\omega_j} + \frac{-\omega_{2s-j}}{x-\omega_{2s-j}}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2s} \frac{-\omega_j}{x-\omega_j}$$

$$= \sum_{j=0}^{2s}\left(1 - \frac{x}{x-\omega_j}\right)$$

$$= 2s + 1 - x\sum_{j=0}^{2s}\frac{1}{x-\omega_j}$$

$$= 2s + 1 - x\left[\frac{\frac{dy}{dx}\prod_{j=0}^{2s}\left(x-\omega_j\right)}{\prod_{j=0}^{2s}\left(x-\omega_j\right)}\right]$$

$$= 2s + 1 - \frac{x\frac{dy}{dx}\left(x^{2s+1}+1\right)}{x^{2s+1}+1}$$

$$= 2s + 1 - (2s+1)\frac{x^{2s+1}}{x^{2s+1}+1}$$

$$= \frac{2s+1}{x^{2s+1}+1}$$

Như vậy, *đẳng thức* $2s+1$ được chứng minh. Điều này dẫn đến kết quả của nguyên hàm I_{2s+1} như sau:

$$
\begin{aligned}
I_{2s+1} &= \int \frac{dx}{x^{2s+1}+1} \\
&= \frac{1}{2s+1}\left[\int \frac{dx}{x+1} + \sum_{j=0}^{s-1}\int \frac{-2x\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{2s+1}+2}{x^2-2x\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{2s+1}+1}dx\right] \\
&= \frac{1}{2s+1}\left\{\int \frac{dx}{x+1} + \sum_{j=0}^{s-1} L\left[\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2s+1}\left\{\ln|x+1|\right. \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{s-1}\left[-\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}\ln\left(x^2-2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}+1\right)\right. \\
&\qquad \left.\left. + 2\sin\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}\tan^{-1}\frac{x-\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{2s+1}}{\sin\dfrac{(2j+1)\pi}{2s+1}}\right]\right\} + const
\end{aligned}
$$

Ngoài ra, kết quả nguyên hàm I_{2s+1} vẫn có thể được biểu diễn dưới dạng logarit của số phức như sau:

$$
\begin{aligned}
I_{2s+1} &= \int \frac{dx}{x^{2s+1}+1} \\
&= \frac{1}{2s+1}\int\left[\frac{1}{x+1} + \sum_{j=0}^{s-1}\frac{-2x\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{2s+1}+2}{x^2-2x\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{2s+1}+1}\right]dx \\
&= \frac{1}{2s+1}\int\left(\sum_{j=0}^{2s}\frac{-\omega_j}{x-\omega_j}\right)dx \\
&= \frac{1}{2s+1}\sum_{j=0}^{2s}\left[-\omega_j\ln\left(x-\omega_j\right)\right] + const
\end{aligned}
$$

Đáng lưu ý, kết quả được biểu diễn dưới dạng logarit của số phức của nguyên hàm I_{2s+1} bao gồm cả trường hợp $s=0$ và cũng giúp xây dựng dự đoán cho nguyên hàm I_{2r} như sẽ được trình bày trong Phần 8 của chuyên luận.

8. Trường hợp tổng quát: $\mathbf{N = 2r}$ $(\mathbf{r} \in \mathbb{N}; \mathbf{r} \geq \mathbf{2})$

Phần này thảo luận về nguyên hàm tổng quát I_{2r}:

$$I_{2r} = \int \frac{dx}{x^{2r}+1} \quad (\mathbf{r} \in \mathbb{N}; \mathbf{r} \geq \mathbf{2})$$

Với phép toán cân bằng hệ số đối với nguyên hàm I_4 như đã trình bày trong Phần 2.1:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{-2x\cos\frac{\pi}{4}+2}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{4}+1} + \frac{-2x\cos\frac{3\pi}{4}+2}{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{4}+1}\right)$$

Ngoài ra, với những kết quả đã thực hiện đối với các nguyên hàm I_8 và I_{16} như đã trình bày trong Phần 4 và Phần 5, ta có thể đưa ra dự đoán cho *đẳng thức* $2r$ đối với nguyên hàm tổng quát I_{2r} như sau:

$$\sum_{l=0}^{r-1} \frac{-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+2}{x^2-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+1} = \frac{2r}{x^{2r}+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Gọi số phức ω_l là nghiệm của phương trình $x^{2r}+1=0$. Như vậy:

$$\omega_l^{2r} = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$\Leftrightarrow \omega_l = \cos\frac{(2l+1)\pi}{2r} + i\sin\frac{(2l+1)\pi}{2r} \quad (l = \overline{0; 2r-1})$$

Với tính chất liên hợp của r cặp nghiệm phức trong $2r$ giá trị của ω_l:

$$\omega_{2r-1-l} = \cos\frac{(4r-2l-1)\pi}{2r} + i\sin\frac{(4r-2l-1)\pi}{2r}$$

$$= \cos\frac{[4r-(2l+1)]\pi}{2r} + i\sin\frac{[4r-(2l+1)]\pi}{2r}$$

$$= \cos\left[2\pi - \frac{(2l+1)\pi}{2r}\right] + i\sin\left[2\pi - \frac{(2l+1)\pi}{2r}\right]$$

$$= \cos\frac{(2l+1)\pi}{2r} - i\sin\frac{(2l+1)\pi}{2r}$$

Do đó, $2r$ giá trị của ω_l có tính chất sau đây:

$$\begin{cases} \omega_l + \omega_{2r-1-l} = 2\cos\dfrac{(2l+1)\pi}{2r} \\ \omega_l\omega_{2r-1-l} = 1 \end{cases}$$

Như vậy,

$$x^2 - 2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r} + 1 = (x-\omega_l)(x-\omega_{2r-1-l})$$

Và kết quả phân tích nhân tử tổng quát:

$$x^{2r} + 1 = \prod_{j=0}^{2r-1}(x-\omega_l)$$

Tương tự như phép toán đã thực hiện trong Phần 7, ta có:

$$\sum_{l=0}^{r-1}\frac{-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+2}{x^2-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+1}$$

$$=\sum_{l=0}^{r-1}\frac{-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+2}{(x-\omega_l)(x-\omega_{2r-1-l})}$$

$$=\sum_{l=0}^{r-1}\left(\frac{-\omega_l}{x-\omega_l}+\frac{-\omega_{2r-1-l}}{x-\omega_{2r-1-l}}\right)$$

$$=\sum_{l=0}^{2r-1}\frac{-\omega_l}{x-\omega_l}$$

$$=\sum_{l=0}^{2r-1}\left(1-\frac{x}{x-\omega_l}\right)$$

$$=2r-x\sum_{l=0}^{2r-1}\frac{1}{x-\omega_l}$$

$$=2r-x\left[\frac{\frac{dy}{dx}\prod_{l=0}^{2r-1}(x-\omega_l)}{\prod_{l=0}^{2r-1}(x-\omega_l)}\right]$$

$$=2r-\frac{x\frac{dy}{dx}(x^{2r}+1)}{x^{2r}+1}$$

$$=2r-\frac{2rx^{2r}}{x^{2r}+1}$$

$$=\frac{2r}{x^{2r}+1}$$

Đẳng thức $2r$ được chứng minh. Nguyên hàm I_{2r} được biểu diễn như sau:

$$I_{2r} = \int \frac{dx}{x^{2r}+1}$$

$$= \frac{1}{2r}\int\left[\sum_{l=0}^{r-1}\frac{-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+2}{x^2-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+1}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2r}\sum_{l=0}^{r-1} L\left[\frac{(2l+1)\pi}{2r}\right]$$

$$= \frac{1}{2r}\sum_{l=0}^{r-1}\left[-\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}\ln\left(x^2-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+1\right)\right.$$

$$\left.+2\sin\frac{(2l+1)\pi}{2r}\tan^{-1}\frac{x-\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}}{\sin\frac{(2l+1)\pi}{2r}}\right]+const$$

Kết quả này áp dụng cho trường hợp N là số chẵn chứ không chỉ là lũy thừa của hai, do đó mang tính khái quát hơn so với nguyên hàm I_{2^n} như được trình bày trong Phần 6. Ngoài ra, kết quả trên cũng có thể được biểu diễn dưới dạng logarit của số phức như sau:

$$I_{2r} = \int \frac{dx}{x^{2r}+1}$$

$$= \frac{1}{2r}\int\left[\sum_{l=0}^{r-1}\frac{-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+2}{x^2-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+1}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2r}\int\left(\sum_{l=0}^{2r-1}\frac{-\omega_l}{x-\omega_l}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2r}\sum_{l=0}^{2r-1}[-\omega_l\ln(x-\omega_l)]+const$$

Kết quả trên của nguyên hàm I_{2r} bao gồm cả trường hợp $s=1$. Điều này dẫn đến hệ thức khá thú vị:

$$\frac{i}{2}\ln\left(\frac{x+i}{x-i}\right)-\tan^{-1}x = const$$

9. Kết luận

Từ kết quả của Phần 7 và Phần 8, ta có được hệ quả sau:

$$I_N = \int \frac{dx}{1+x^N} \quad (N \in \mathbb{N}^+)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{z=0}^{N-1}[-\omega_z \ln(x-\omega_z)] + const$$

Trong đó ω_z là các nghiệm của phương trình $x^N = -1$, tức là:

$$\omega_z = \cos\frac{(2z+1)\pi}{N} + i\sin\frac{(2z+1)\pi}{N} = e^{\frac{(2z+1)i\pi}{N}} \quad (z = \overline{0; N-1})$$

Ngoài ra, với N nguyên dương, có thể khái quát nguyên hàm theo hướng sau:

$$I_{-N} = \int \frac{dx}{1+x^{-N}} = \int \frac{x^N}{1+x^N}dx = 1 - \int \frac{dx}{1+x^N} = 1 - I_N$$

Nói cách khác, có thể mở rộng bài toán nguyên hàm đối với trường hợp N là số nguyên ($N \in \mathbb{Z}$).

Kết quả cuối cùng của bài toán nguyên hàm tổng quát là khá tường minh với lời giải không quá phức tạp. Tuy nhiên, để tìm được kết quả đó, tác giả phải trải qua một diễn trình tính toán như trình bày chi tiết từ Phần 2 đến Phần 6. Với việc soạn thảo tập chuyên luận này, tác giả mong muốn được chia sẻ tới quý độc giả thông điệp *"vinh quang hiện hữu không chỉ ở đích đến, mà còn xuyên suốt cả một chặng đường"*.

INTEGRATING A GENERALIZED RATIONAL FUNCTION

Benny Lê Văn

Abstract

In this paper, the author would present the solution for the following generalized integral:

$$I_N = \int \frac{dx}{1 + x^N}$$

Of which N is a natural number. The purpose of this paper is not only showing the result, but also more importantly presenting the author's process to find the solution. In particular, the author assesses the integral for cases where N is a power of two, an odd number, and an even number, respectively. Finally, those findings are applied to form the generalized result.

Key words: (Indefinite) Integral, Rational Function.

1. Introduction

This paper discusses on the generalized indefinite integral:

$$I_N = \int \frac{dx}{1 + x^N} \quad (N \in \mathbb{N})$$

Firstly, the author approach simple cases such as:

For $N = 0$, $N = 1$, and $N = 2$, respectively:

$$I_0 = \int dx = x + const$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{1 + x} = \ln|1 + x| + const$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{1 + x^2} = \tan^{-1} x + const$$

Additionally, two following integrals are applied throughout the paper:

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} \quad (a > 0)$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$$

In order to calculate J_1, the following fraction decomposition is performed:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right)$$

Thus,

$$J_1 = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x - a} - \int \frac{dx}{x + a}\right) = \frac{1}{2a}(\ln|x - a| - \ln|x + a|) + const$$

$$= \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + const$$

Regarding J_2:

$$J_2 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + const$$

For $N = 3$:

$$I_3 = \int \frac{dx}{1 + x^3}$$

Applying $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, it is supposed to find real numbers A, B, and C such that

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{C}{x+1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Replacing $x = 0$, $x = 1$, and $x = 2$ to the above, we get:

$$\begin{cases} B + C = 1 \\ A + B + \frac{1}{2}C = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow (A; B; C) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

And then:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{dx}{1+x^3} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{-x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{3}\ln|x+1| + const \\ &= -\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{3}\ln|x+1| + const \\ &= -\frac{1}{6}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{3}\ln|x+1| + const \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} + const \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + const \end{aligned}$$

Following up the introduction as presented in Section 1, the paper will discuss on particular cases of N in order to direct the generalized result. Accordingly, Section 2 to Section 6 discuss on the case that N are powers of two, i.e. $N = 2^n$ $(n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$; Section 7 discusses on the case that N are odd numbers, i.e. $N = 2s + 1$ $(s \in \mathbb{N}^+)$; Section 8 discusses on the case that N are even numbers, i.e. $N = 2r$ $(r \in \mathbb{N}; r \geq 2)$; and Section 9 presents the conclusion for the generalized integral.

2. N = 4: multiple solutions for a problem

This section discusses on multiple solutions for the case $N = 4$.

$$I_4 = \int \frac{dx}{1 + x^4}$$

2.1. Partial fraction decomposition

Factoring:

$$\begin{aligned}
&x^4 + 1 \\
&= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 \\
&= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 \\
&= \left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)
\end{aligned}$$

Hence, we shall perform the following partial fraction decomposition:

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Of which A, B, C, and D are given real numbers.

Replacing $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ and $x = i$ (as $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) to the above, we get:

$$\begin{cases} B + D = 1 \\ \sqrt{2}A + B + \frac{1}{5}\left(\sqrt{2}C + D\right) = \frac{1}{5} \\ -\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{Bi}{\sqrt{2}} + \frac{C}{\sqrt{2}} - \frac{Di}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (A; B; C; D) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right)$$

Thus,

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \frac{dx}{1 + x^4} \\
&= \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}dx + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}dx \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{-2x + \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}dx \\
&\qquad + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

$$+ \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x - 1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x + 1\right)\right]$$

$$+ const$$

2.2. Analyzed method I

To confront complicated problems, we sometimes *divide and conquer*. In contrast, to deal with *simple but rough* problems, it is supposed to drive those *large but soft*. This philosophy is entirely applied in this sub-section.

In particular, before dealing with

$$I_4 = \int \frac{dx}{1 + x^4}$$

We assess the follows:

$$K_1 = \int \frac{x^3}{x^4 + 1}dx$$

$$K_2 = \int \frac{x}{x^4 + 1}dx$$

Simply and softly,

$$K_1 = \int \frac{x^3}{x^4 + 1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4 + 1)}{x^4 + 1} = \frac{1}{4}\ln(x^4 + 1) + const$$

$$K_2 = \int \frac{x}{x^4 + 1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2 + 1} = \frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2) + const$$

Besides,

$$\frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{2(x^2 + 1)}{x^4 + 1}$$

Thus,

$$K_3 = \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{d\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \int \frac{d\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x - 1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x + 1\right)\right] + const$$

Due to the calculation of K_1, K_2, and K_3, we consequently enable to deal with the following form:

$$\int \frac{x^3 + x + \kappa(x^2 + 1)}{x^4 + 1} dx = \int \frac{x^3 + \kappa x^2 + x + \kappa}{x^4 + 1} dx$$

Of which κ is a given real number.

As a result, if we somehow calculate the following integral

$$\int \frac{x^3 + \kappa x^2 + x}{x^4 + 1} dx$$

Then by a subtraction, we enable to find

$$I_4 = \int \frac{dx}{1 + x^4}$$

This is the direction of Analyzed method I.

As $x^4 + 1 = \left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)$, if we choose $\kappa = \pm\sqrt{2}$, the problem is solved. For $\kappa = \sqrt{2}$:

$$K_4 = \int \frac{x^3 + \sqrt{2}x^2 + x}{x^4 + 1} dx$$

$$= \int \frac{x^3 + \sqrt{2}x^2 + x}{\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)} dx$$

$$= \int \frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$$

$$= \int \frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x - 1\right) + const$$

By a linear combination of K_1, K_2, and K_3:

$$K_5 = \int \frac{x^3 + \sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2}}{x^4 + 1}dx$$

$$= K_1 + K_2 + \sqrt{2}K_3$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x - 1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x + 1\right) + const$$

Besides:

$$\frac{1}{4}\ln(x^4 + 1) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x^4 + 1) - \frac{1}{4}\ln\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^4 + 1}{\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right)$$

Returning to I_4, we get:

$$I_4 = \int \frac{dx}{1 + x^4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(K_5 - K_4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{4}\ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x - 1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x + 1\right)\right]$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x - 1\right)\right] + const$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x + 1\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}(x^2) + const$$

In comparison to the result as found by partial fraction decomposition, we get:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}(x^2)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)\right]+const$$

$$\Leftrightarrow \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)-\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)+\tan^{-1}(x^2)=const$$

Indeed, forming the function

$$\Xi(x)=\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)-\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)+\tan^{-1}(x^2)$$

Then

$$\Xi'(x)=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1}-\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1}+\frac{2x}{x^4+1}$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2x^2+2\sqrt{2}x+2}-\frac{1}{2x^2-2\sqrt{2}x+2}\right)+\frac{2x}{x^4+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\left(-2\sqrt{2}x\right)}{x^4+1}+\frac{2x}{x^4+1}$$

$$=-\frac{2x}{x^4+1}+\frac{2x}{x^4+1}$$

$$=0$$

$$\Xi'(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Xi(x)=const \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Besides, $\Xi(0)=\frac{\pi}{2}$. Thus:

$$\Xi(x)=\frac{\pi}{2} \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

As above clarified, the two approaches of an integral result in two different expressions. This fact is explained by the constant of integration.

2.3. Analyzed method II

In the previous approach, we apply the *summation*

$$\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}=\frac{2(x^2+1)}{x^4+1}$$

In this sub-section, we apply the *subtraction*

$$\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}=\frac{2\sqrt{2}x}{x^4+1}$$

Regarding Analyzed method II, integral I_4 is calculated as follow:

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx - \int \frac{x^2}{x^4+1}dx$$

As obtained in sub-section 2.2:

$$K_3 = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)\right] + const$$

In order to calculate

$$K_6 = \int \frac{x^2}{x^4+1}dx$$

We perform the following *subtraction*:

$$\begin{aligned}
K_6 &= \int \frac{x^2}{x^4+1}dx \\
&= \int \frac{x.x}{x^4+1}dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int x\left(\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)dx\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int \frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx - \int \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int \frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx - \int \frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx - \int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\right] \\
&\qquad + \frac{1}{4}\left[\int \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\int \frac{d\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \int \frac{d\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right] \\
&\qquad + \frac{1}{4}\left[\int \frac{d\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} - \int \frac{d\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) + + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)\right] \\
&\qquad + const
\end{aligned}$$

And finally,

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^4+1} = K_3 - K_6$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)\right] + const$$

This results is consistent the expression as found by partial fraction decomposition.

The integral I_4 has been solved in three distinct ways, which of those have their own pros and cons. The most logic-like approach may be partial fraction decomposition, while analyzed methods technically apply algebraic transformations. However, the three ways contain massive calculation. Therefore, we shall necessarily find a shortcut. The to-be-found new way will tremendously help deal with the generalized integral:

$$I_{2^n} = \int \frac{dx}{1+x^{2^n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

2.4. Sum & Sub

This method is inspired by the two algebraic equalities:

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ and $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$

In order to calculate integral I_4, we shall respectively find the so-called *Sum & Sub* integrals:

$$\begin{cases} K_3 = \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx \\ K_7 = \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx \end{cases}$$

Accordingly:

$$K_3 = \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + const$$

And

$$K_7 = \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}} \right| + const$$

As a result:

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2}(K_3 - K_7)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + const$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + const$$

In comparison to the result as found by partial fraction decomposition, the constant of integration form the equality:

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x + 1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x - 1\right) - \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Moreover, the *Sum & Sub* method help solve integrals in following forms:

$$\begin{cases} I_4^0(\mu) = \int \frac{dx}{x^4 + \mu x^2 + 1} \\ I_4^2(\nu) = \int \frac{x^2}{x^4 + \nu x^2 + 1} dx \end{cases}$$

Of which, μ and ν are given real numbers.

In Section 2, we have solved a problem with four approaches. In summary, the *Sum & Sub* method seems to be the most effective way. However, other methods may be also useful in the case we have to deal with more complicated problems, such as integral I_8:

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8 + 1}$$

Before that, integrals I_5 and I_6 will be discussed in the next section.

3. For $N = 5$ and $N = 6$

3.1. Integral I_5

Factoring: $x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

By complex numbers, we enable to further factor as follow:

$$x^5 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^5 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$\Leftrightarrow x_k = \cos\frac{\pi + k2\pi}{5} + i\sin\frac{\pi + k2\pi}{5} \quad (k = \overline{0;4})$$

$$\Leftrightarrow x_k = \left(e^{i\pi/5}; e^{3i\pi/5}; -1; e^{7i\pi/5}; e^{9i\pi/5}\right) \quad (k = \overline{0;4})$$

Of which:

$$\begin{cases} x_0 + x_4 = 2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_1 + x_2 = 2\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x_0 x_4 = x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

So,

$$x^5 + 1 = (x + 1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{5} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{5} + 1\right)$$

We shall find the five real numbers $(A; B; C; D; E)$ such that

$$\frac{1}{x^5 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Solving the above, we get:

$$(A; B; C; D; E) = \left(\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; -\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

Rewriting:

$$\frac{1}{x^5 + 1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x + 1} + \frac{-x^3 + 2x^2 - 3x + 4}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}\right)$$

Next, we shall find the four real numbers $(T; U; V; W)$ such that

$$\frac{-x^3 + 2x^2 - 3x + 4}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1} = \frac{Tx + U}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{5} + 1} + \frac{Vx + W}{x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{5} + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

For $x = 0$, $x = 1$ and $x = i$ (as $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), we get the system:

$$\begin{cases} U + W = 4 \\ \dfrac{T+U}{2-2\cos\frac{\pi}{5}} + \dfrac{V+W}{2-2\cos\frac{3\pi}{5}} = 2 \\ -\dfrac{T}{2\cos\frac{\pi}{5}} + \dfrac{Ui}{2\cos\frac{\pi}{5}} - \dfrac{V}{2\cos\frac{3\pi}{5}} + \dfrac{Wi}{2\cos\frac{3\pi}{5}} = 2-2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T;U;V;W) = \left(-2\cos\frac{\pi}{5}; 2; -2\cos\frac{3\pi}{5}; 2\right)$$

As a result:

$$\frac{-x^3+2x^2-3x+4}{x^4-x^3+x^2-x+1} = \frac{-2x\cos\frac{\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{5}+1} + \frac{-2x\cos\frac{3\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{5}+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Conseuently, integral I_5 is performed as follow:

$$I_5 = \int \frac{dx}{x^5+1}$$

$$= \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x^3+2x^2-3x+4}{x^4-x^3+x^2-x+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-2x\cos\frac{\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{5}+1} + \frac{-2x\cos\frac{3\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{5}+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{5}\left(\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-2x\cos\frac{\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{5}+1} dx + \int \frac{-2x\cos\frac{3\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{5}+1} dx\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\ln|x+1| + \int \frac{-2x\cos\frac{\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{5}+1} dx + \int \frac{-2x\cos\frac{3\pi}{5}+2}{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{5}+1} dx\right)$$
$$+ const$$

As a lemma, we assess:

$$L(\delta) = \int \frac{-2x\cos\delta + 2}{x^2 - 2x\cos\delta + 1} dx$$

$$= \int \frac{-2x\cos\delta + 2(\cos\delta)^2 + 2(\sin\delta)^2}{x^2 - 2x\cos\delta + 1} dx$$

$$= -\cos\delta \int \frac{2x + 2(\cos\delta)^2}{x^2 - 2x\cos\delta + 1} dx + 2(\sin\delta)^2 \int \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\delta + 1}$$

$$= -\cos\delta \int \frac{d(x^2 - 2x\cos\delta + 1)}{x^2 - 2x\cos\delta + 1} dx$$
$$+ 2(\sin\delta)^2 \int \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\delta + (\cos\delta)^2 + (\sin\delta)^2}$$
$$= -\cos\delta \ln(x^2 - 2x\cos\delta + 1) + 2(\sin\delta)^2 \int \frac{d(x - \cos\delta)}{(x - \cos\delta)^2 + (\sin\delta)^2}$$
$$= -\cos\delta \ln(x^2 - 2x\cos\delta + 1) + 2\sin\delta \tan^{-1}\frac{x - \cos\delta}{\sin\delta} + const$$

Returning to integral I_5:

$$I_5 = \frac{1}{5}\left[\ln|x+1| + L\left(\frac{\pi}{5}\right) + L\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right] + const$$
$$= \frac{1}{5}\left[\ln|x+1| - \cos\frac{\pi}{5}\ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{5} + 1\right) + 2\sin\frac{\pi}{5}\tan^{-1}\frac{x - \cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\right.$$
$$\left. - \cos\frac{3\pi}{5}\ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{5} + 1\right) + 2\sin\frac{3\pi}{5}\tan^{-1}\frac{x - \cos\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{3\pi}{5}}\right]$$
$$+ const$$

Coincidentally, the result of integral I_3 could be written as:

$$I_3 = \int \frac{dx}{x^3 + 1}$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + const$$
$$= \frac{1}{3}\left[\ln|x+1| - \cos\frac{\pi}{3}\ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{3} + 1\right) + 2\sin\frac{\pi}{3}\tan^{-1}\frac{x - \cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right]$$
$$+ const$$
$$= \frac{1}{3}\left[\ln|x+1| + L\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] + const$$

This is a key point to form a conjecture for the case that N are odd numbers, i.e. $N = 2s + 1$ ($s \in \mathbb{N}^+$), which will be discussed in Section 7.

3.2. Integral I_6

Factoring $x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

And applying $I_4^0(\mu)$ for $\mu=-1$, i.e.

$$I_4^0(-1)=\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}$$

Integral I_6 could be calculated as follow:

$$\begin{aligned}
I_6&=\int\frac{dx}{x^6+1}\\
&=\int\frac{(x^2+1)-x^2}{x^6+1}dx\\
&=\int\frac{x^2+1}{x^6+1}dx-\int\frac{x^2}{x^6+1}dx\\
&=\int\frac{x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx-\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}\\
&=\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+const\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+const\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+const\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}dx-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+const\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+const\\
&=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{3}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+const\\
&=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right)-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+const
\end{aligned}$$

4. $N = 8$: multiple methods combined

This section discuss on the following integral:

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8 + 1}$$

Factoring:

$$\begin{aligned}
& x^8 + 1 \\
&= x^8 + 2x^4 + 1 - 2x^4 \\
&= (x^4 + 1)^2 - 2x^4 \\
&= \left(x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1\right)\left(x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1\right) \\
&= \left(x^4 - 2x^2 \cos\frac{\pi}{4} + 1\right)\left(x^4 + 2x^2 \cos\frac{\pi}{4} + 1\right) \\
&= \left(x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 \cos\frac{\pi}{4} - 2x^2\right)\left(x^4 + 2x^2 + 1 + 2x^2 \cos\frac{\pi}{4} - 2x^2\right) \\
&= \left[(x^2 + 1)^2 - 2x^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[(x^2 + 1)^2 - 2x^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \left[(x^2 + 1)^2 - 4x^2\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2\right]\left[(x^2 + 1)^2 - 4x^2\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2\right] \\
&= \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{8} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{\pi}{8} + 1\right)\left(x^2 - 2x\sin\frac{\pi}{8} + 1\right)\left(x^2 \right. \\
&\qquad \left. + 2x\sin\frac{\pi}{8} + 1\right)
\end{aligned}$$

The first thoughts may relate to partial fraction decomposition. Accordingly, we shall find the eight real numbers (A, B, C, D, E, F, G, H) such that

$$\frac{1}{x^8 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{8} + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x\cos\frac{\pi}{8} + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 - 2x\sin\frac{\pi}{8} + 1} + \frac{Gx + H}{x^2 + 2x\sin\frac{\pi}{8} + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

This approach still seems to be possible. However, massive calculation is unavoidable. Furthermore, after finding the eight real numbers, we have to deal with multiple integrals under the form

$$\int \frac{ux + v}{px^2 + qx + r}\,dx$$

Hence, this method should be temporarily delayed and we can try other approaches as detailed in Section 2. As the *Sum & Sub* is surprisingly effective, it should be first considered. In accordance with the *Sum & Sub* philosophy, we have to deal with two following integrals:

$$\begin{cases} N_1 = \int \frac{x^4+1}{x^8+1} dx \\ N_2 = \int \frac{x^4-1}{x^8+1} dx \end{cases}$$

As well as the pathway in Sub-Section 2.4:

$$N_1 = \int \frac{x^4+1}{x^8+1} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^4}}{x^4+\frac{1}{x^4}} dx$$

It seems possible to perform $\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)$ under $\left(x \pm \frac{1}{x}\right)$ or $\left(x^2 \pm \frac{1}{x^2}\right)$. However, it is noticeable that

$$d\left(x \pm \frac{1}{x}\right) = \left(1 \mp \frac{1}{x^2}\right) dx$$

And

$$d\left(x^2 \pm \frac{1}{x^2}\right) = \left(2x \mp \frac{2}{x^3}\right) dx$$

Conseequently, it is difficult to find any relations between the above and the integrated $\left(1+\frac{1}{x^4}\right) dx$. So, the *Sum & Sub* may not work alone.

With Analyzed methods, we may consider the two integrals:

$$\begin{cases} N_1 = \int \frac{x^4+1}{x^8+1} dx \\ N_3 = \int \frac{x^4}{x^8+1} dx \end{cases}$$

Applying the fraction decomposition

$$\frac{x^4+1}{x^8+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^4-\sqrt{2}x^2+1} + \frac{1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}\right)$$

Thus,

$$N_1 = \int \frac{x^4+1}{x^8+1} dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x^4-\sqrt{2}x^2+1} + \int \frac{dx}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}\right)$$

Now we can apply the *Sum & Sub*, where

$$\begin{cases} I_4^0(-\sqrt{2}) = \displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} \\ I_4^0(\sqrt{2}) = \displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} \end{cases}$$

Applying to Analayzed method I for integral N_3:

$$N_3 = \int \frac{x^4}{x^8+1} dx = \int \frac{x^2 . x^2}{x^8+1} dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int x^2 \left(\frac{1}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} - \frac{1}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int \frac{x^2}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} dx - \int \frac{x^2}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[I_4^2(-\sqrt{2}) - I_4^2(\sqrt{2}) \right]$$

The result holds when Analyzed method II is applied:

$$\frac{x^4}{x^8+1} = \frac{x^4}{\left(x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1\right)\left(x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\left(x^6 + \sqrt{2}x^4 + x^2\right) - \left(x^6 + x^2\right)}{\left(x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1\right)\left(x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{x^2}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} - \frac{x^2(x^4+1)}{\left(x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1\right)\left(x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{x^2}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} - \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} + \frac{1}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x^2}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} - \frac{x^2}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} \right)$$

As Analyzed methods are applied, it is noticeable that the partial fraction decomposition method still works if we find the four real numbers (A, B, C, D) such that

$$\frac{1}{x^8+1} = \frac{Ax^2 + B}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} + \frac{Cx^2 + D}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

As described in Sub-Section 2.1, the solution for the above equation is $(A; B; C; D) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2} \right)$.

Therefore, it is said that we shall combine multiple approaches in order to deal with integral I_8. This fact is clarified when the *Sum & Sub* is applied at the second stage of the solution. Applying consequences as presented in Sub-Section 2.3, we get:

$$I_4^0(-\sqrt{2}) = \int \frac{dx}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1}$$

$$I_4^0(\sqrt{2}) = \int \frac{dx}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1}$$

$$I_4^2(-\sqrt{2}) = \int \frac{x^2}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1}dx$$

$$I_4^2(\sqrt{2}) = \int \frac{x^2}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1}dx$$

Returning to integral I_8:

$$\frac{1}{x^8+1} = \frac{x^4+1}{x^8+1} - \frac{x^4}{x^8+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} + \frac{1}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x^2}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} - \frac{x^2}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1}\right)$$

Integrating the above:

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8+1} = \frac{1}{2}\left[I_4^0(-\sqrt{2}) + I_4^0(\sqrt{2})\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-I_4^2(-\sqrt{2}) + I_4^2(\sqrt{2})\right]$$

In order to calculate integrals $I_4^0(\mu)$ and $I_4^2(\nu)$, we shall factor:

$$x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1 = x^4 - 2x^2\cos\frac{\pi}{4} + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2\cos\frac{\pi}{4} - 2x^2$$

$$= (x^2+1)^2 - 2x^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) = (x^2+1)^2 - 4x^2\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$$

As well as

$$x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1 = x^4 + 2x^2\cos\frac{\pi}{4} + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 + 2x^2\cos\frac{\pi}{4} - 2x^2$$

$$= (x^2+1)^2 - 2x^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) = (x^2+1)^2 - 4x^2\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$$

Noticeably,

$$\begin{cases} 2+\sqrt{2} = 2 + 2\cos\dfrac{\pi}{4} = 2\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}\right) = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{8}\right)^2 \\ 2-\sqrt{2} = 2 - 2\cos\dfrac{\pi}{4} = 2\left(1-\cos\dfrac{\pi}{4}\right) = 4\left(\sin\dfrac{\pi}{8}\right)^2 \end{cases}$$

Denoting:

$$\begin{cases} I_4^+(\lambda) = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+\lambda x^2+1}\,dx \\ I_4^-(\lambda) = \displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+\lambda x^2+1}\,dx \end{cases}$$

Of which λ is a given real number.

We respectively obtain:

$$I_4^+\left(-\sqrt{2}\right) = \int \frac{x^2+1}{x^4-\sqrt{2}x^2+1}\,dx = \int \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{2}}\,dx$$

$$= \int \frac{d\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2-\sqrt{2}} = \int \frac{d\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4\left(\sin\dfrac{\pi}{8}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\csc\frac{\pi}{8}\tan^{-1}\frac{x-\dfrac{1}{x}}{2\sin\dfrac{\pi}{8}} + const$$

And

$$I_4^-\left(-\sqrt{2}\right) = \int \frac{x^2-1}{x^4-\sqrt{2}x^2+1}\,dx = \int \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{2}}\,dx$$

$$= \int \frac{d\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(2+\sqrt{2}\right)} = \int \frac{d\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4\left(\cos\dfrac{\pi}{8}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sec\frac{\pi}{8}\ln\left|\frac{x+\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{\pi}{8}}{x+\dfrac{1}{x}+2\cos\dfrac{\pi}{8}}\right| + const$$

$$= \frac{1}{4}\sec\frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{x^2-2x\cos\dfrac{\pi}{8}+1}{x^2+2x\cos\dfrac{\pi}{8}+1}\right) + const$$

Similarly,

$$I_4^+(\sqrt{2}) = \int \frac{x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}+\sqrt{2}}dx$$

$$= \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2+\sqrt{2}} = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{8}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{8}} + const$$

And

$$I_4^-(\sqrt{2}) = \int \frac{x^2-1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}+\sqrt{2}}dx$$

$$= \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(2-\sqrt{2}\right)} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\csc\frac{\pi}{8}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-2\sin\frac{\pi}{8}}{x+\frac{1}{x}+2\sin\frac{\pi}{8}}\right| + const$$

$$= \frac{1}{4}\csc\frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{x^2-2x\sin\frac{\pi}{8}+1}{x^2+2x\sin\frac{\pi}{8}+1}\right) + const$$

Returning to integrals $I_4^0(-\sqrt{2})$, $I_4^0(\sqrt{2})$, $I_4^2(-\sqrt{2})$, and $I_4^2(\sqrt{2})$:

$$I_4^0(-\sqrt{2}) = \int \frac{dx}{x^4-\sqrt{2}x^2+1} = \frac{1}{2}\left[I_4^+(-\sqrt{2}) - I_4^-(-\sqrt{2})\right]$$

$$I_4^0(\sqrt{2}) = \int \frac{dx}{x^4+\sqrt{2}x^2+1} = \frac{1}{2}\left[I_4^+(\sqrt{2}) - I_4^-(\sqrt{2})\right]$$

$$I_4^2(-\sqrt{2}) = \int \frac{x^2}{x^4-\sqrt{2}x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left[I_4^+(-\sqrt{2}) + I_4^-(-\sqrt{2})\right]$$

$$I_4^2(\sqrt{2}) = \int \frac{x^2}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left[I_4^+(\sqrt{2}) + I_4^-(\sqrt{2})\right]$$

At the final step:

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8+1} = \frac{1}{2}\left[I_4^0\left(-\sqrt{2}\right) + I_4^0\left(\sqrt{2}\right)\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-I_4^2\left(-\sqrt{2}\right) + I_4^2\left(\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[I_4^+\left(-\sqrt{2}\right) - I_4^-\left(-\sqrt{2}\right) + I_4^+\left(\sqrt{2}\right) - I_4^-\left(\sqrt{2}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[-I_4^+\left(-\sqrt{2}\right) - I_4^-\left(-\sqrt{2}\right) + I_4^+\left(\sqrt{2}\right) + I_4^-\left(\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{8} I_4^+\left(-\sqrt{2}\right) - \frac{2+\sqrt{2}}{8} I_4^-\left(-\sqrt{2}\right) + \frac{2+\sqrt{2}}{8} I_4^+\left(\sqrt{2}\right)$$

$$- \frac{2-\sqrt{2}}{8} I_4^-\left(\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(2-\sqrt{2}\right)\left(I_4^+\left(-\sqrt{2}\right) - I_4^-\left(\sqrt{2}\right)\right) + \left(2+\sqrt{2}\right)\left(-I_4^-\left(-\sqrt{2}\right) + I_4^+\left(\sqrt{2}\right)\right)\right]$$

It is also noticeable that:

$$\left(2-\sqrt{2}\right)\left(I_4^+\left(-\sqrt{2}\right) - I_4^-\left(\sqrt{2}\right)\right)$$

$$= 4\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 \left[\frac{1}{2}\csc\frac{\pi}{8}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{4}\csc\frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{x^2 - 2x\sin\frac{\pi}{8}+1}{x^2+2x\sin\frac{\pi}{8}+1}\right)\right]$$

$$+ const$$

$$= \sin\frac{\pi}{8}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{\pi}{8}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\sin\frac{\pi}{8}+1}{x^2-2x\sin\frac{\pi}{8}+1}\right)\right] + const$$

And similarly,

$$\left(2+\sqrt{2}\right)\left(-I_4^-\left(-\sqrt{2}\right) + I_4^+\left(\sqrt{2}\right)\right)$$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 \left[-\frac{1}{4}\sec\frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{x^2-2x\cos\frac{\pi}{8}+1}{x^2+2x\cos\frac{\pi}{8}+1}\right) + \frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{8}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{8}}\right]$$

$$+ const$$

$$= \cos\frac{\pi}{8}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{8}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{\pi}{8}+1}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{8}+1}\right)\right] + const$$

Therefore, integral I_8 could be expressed as follow:

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8 + 1}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\sin\frac{\pi}{8}\left[2\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2\sin\frac{\pi}{8}} + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\sin\frac{\pi}{8} + 1}{x^2 - 2x\sin\frac{\pi}{8} + 1}\right)\right]\right.$$

$$\left. + \cos\frac{\pi}{8}\left[2\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{8}} + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cos\frac{\pi}{8} + 1}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{8} + 1}\right)\right]\right\} + const$$

The above expression drives us wonder if there exist any relation between integrals I_8 and I_4, where:

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^4 + 1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right) + const$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right)\right] + const$$

$$= \frac{1}{4} * \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right)\right] + const$$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}\left[2\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2\sin\frac{\pi}{4}} + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\sin\frac{\pi}{4} + 1}{x^2 - 2x\sin\frac{\pi}{4} + 1}\right)\right] + const$$

$$= \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4}\left[2\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{4}} + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cos\frac{\pi}{4} + 1}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{4} + 1}\right)\right] + const$$

There should be an existed relation between integrals I_8 and I_4. If this relation is found, it is the key to deal with the generalized integral I_{2^n}. This fact will be discussed in next sections of this paper.

5. N = 16: integrating by deriving

This section discusses on the following integral:

$$I_{16} = \int \frac{dx}{x^{16} + 1}$$

As presented in the previous section:

$$\frac{1}{x^8 + 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} + \frac{1}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x^2}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} - \frac{x^2}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1}\right)$$

Applying the three methods as presented in the previous section, we got:

$$\frac{1}{x^8 + 1} = \frac{Ax^2 + B}{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1} + \frac{Cx^2 + D}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

The obtained result was $(A; B; C; D) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right)$.

Integral I_8 was calculated based on the follows:

$$\begin{cases} I_4^0(\mu) = \displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + \mu x^2 + 1} \\ I_4^2(\nu) = \displaystyle\int \frac{x^2}{x^4 + \nu x^2 + 1} dx \end{cases}$$

Of which, μ and ν are given real numbers. The above integrals could be solved effectively thanks to *Sum & Sub* method.

Regarding integral I_{16}, we perform the partial fraction decomposition:

$$\frac{1}{x^{16} + 1} = \frac{Ax^4 + B}{x^8 - \sqrt{2}x^4 + 1} + \frac{Cx^4 + D}{x^8 + \sqrt{2}x^4 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

The result is also $(A; B; C; D) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right)$.

Next, we further perform rewrite the above under

$$\sum \frac{a_i x^2 + b_i}{x^4 + \kappa x^2 + 1}$$

Of which, a_i, b_i, and κ are given real numbers. In particular, κ will be found directly through the factoring of $(x^{16} + 1)$, a_i and b_i will be found based on further processes of partial fraction decomposition.

And thanks to the impressive *Sum & Sub*, those integrals could be simply solved. Hence, despite the massive calculation, there is somehow a way to find integral I_{16}. However, if we can find any relation between the found results of integrals I_4 and I_8, we can build a conjecture for integral I_{16}.

Indeed, we obtained

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^4+1}$$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{\pi}{4}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\sin\frac{\pi}{4}+1}{x^2-2x\sin\frac{\pi}{4}+1}\right)\right] + const$$

$$= \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{4}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{\pi}{4}+1}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{4}+1}\right)\right] + const$$

And

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8+1}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\sin\frac{\pi}{8}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{\pi}{8}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\sin\frac{\pi}{8}+1}{x^2-2x\sin\frac{\pi}{8}+1}\right)\right]\right.$$

$$\left. + \cos\frac{\pi}{8}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{8}} + \ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{\pi}{8}+1}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{8}+1}\right)\right]\right\} + const$$

With regard to above integrals, if we put

$$\eta(t) = t\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2t} + \ln\left(\frac{x^2+2xt+1}{x^2-2xt+1}\right)\right]$$

Then we can re-perform

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4}\eta\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) + const = \frac{1}{4}\eta\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + const$$

As well as

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8+1} = \frac{1}{8}\left[\eta\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) + \eta\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)\right] + const$$

$$= \frac{1}{8}\left[\eta\left(\cos\frac{\pi}{8}\right) + \eta\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)\right] + const$$

Before building the conjecture, we perform the factoring:

$$x^{16} + 1 = x^{16} + 2x^8 + 1 - 2x^8$$

$$= (x^8 + 1)^2 - 2x^8$$

$$= \left(x^8 - \sqrt{2}x^4 + 1\right)\left(x^8 + \sqrt{2}x^4 + 1\right)$$

$$= \left(x^8 - 2x^4 \cos\frac{\pi}{4} + 1\right)\left(x^8 - 2x^4 \cos\frac{3\pi}{4} + 1\right)$$

$$= \left(x^8 + 2x^4 + 1 - 2x^4 - 2x^4 \cos\frac{\pi}{4}\right)\left(x^8 + 2x^4 + 1 - 2x^4 - 2x^4 \cos\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \left[(x^4 + 1)^2 - 2x^4\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[(x^4 + 1)^2 - 2x^4\left(1 + \cos\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \left[(x^4 + 1)^2 - 4x^4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2\right]\left[(x^4 + 1)^2 - 4x^4\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2\right]$$

$$= \left(x^4 - 2x^2 \cos\frac{\pi}{8} + 1\right)\left(x^4 + 2x^2 \cos\frac{\pi}{8} + 1\right)\left(x^4 - 2x^2 \cos\frac{3\pi}{8} + 1\right)$$
$$\left(x^4 + 2x^2 \cos\frac{3\pi}{8} + 1\right)$$

$$= \left(x^4 - 2x^2 \cos\frac{\pi}{8} + 1\right)\left(x^4 - 2x^2 \cos\frac{3\pi}{8} + 1\right)\left(x^4 - 2x^2 \cos\frac{5\pi}{8} + 1\right)$$
$$\left(x^4 - 2x^2 \cos\frac{7\pi}{8} + 1\right)$$

It is necessary to perform the above transformation in order to put the following function:

$$\zeta(t) = x^4 - 2x^2 t + 1$$

Returning to the factoring:

For $\zeta\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

$$\zeta\left(\frac{\pi}{8}\right) = x^4 - 2x^2 \cos\frac{\pi}{8} + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 2x^2 \cos\frac{\pi}{8}$$

$$= (x^2 + 1)^2 - 2x^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= (x^2 + 1)^2 - 4x^2\left(\cos\frac{\pi}{16}\right)^2$$

$$= \left(x^2 - 2x \cos\frac{\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x \cos\frac{\pi}{16} + 1\right)$$

For $\zeta\left(\frac{3\pi}{8}\right)$:

$$\zeta\left(\frac{3\pi}{8}\right) = x^4 - 2x^2\cos\frac{3\pi}{8} + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 2x^2\cos\frac{3\pi}{8}$$

$$= (x^2+1)^2 - 2x^2\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= (x^2+1)^2 - 4x^2\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right)^2$$

$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{3\pi}{16} + 1\right)$$

For $\zeta\left(\frac{5\pi}{8}\right)$:

$$\zeta\left(\frac{5\pi}{8}\right) = x^4 - 2x^2\cos\frac{5\pi}{8} + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 2x^2\cos\frac{5\pi}{8}$$

$$= (x^2+1)^2 - 2x^2\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)$$

$$= (x^2+1)^2 - 4x^2\left(\cos\frac{5\pi}{16}\right)^2$$

$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{5\pi}{16} + 1\right)$$

For $\zeta\left(\frac{7\pi}{8}\right)$:

$$\zeta\left(\frac{7\pi}{8}\right) = x^4 - 2x^2\cos\frac{7\pi}{8} + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 2x^2\cos\frac{7\pi}{8}$$

$$= (x^2+1)^2 - 2x^2\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$= (x^2+1)^2 - 4x^2\left(\cos\frac{7\pi}{16}\right)^2$$

$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{7\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{7\pi}{16} + 1\right)$$

Thus,

$$x^{16}+1=\prod_{k=0}^{3}\left[\left(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}+1\right)\left(x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}+1\right)\right]$$

$$=\prod_{k=0}^{3}\left[\left(x^2-2x\sin\frac{(2k+1)\pi}{16}+1\right)\left(x^2+2x\sin\frac{(2k+1)\pi}{16}+1\right)\right]$$

Considering fucntion $\eta(t)$:

$$\eta(t)=t\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2t}+\ln\left(\frac{x^2+2xt+1}{x^2-2xt+1}\right)\right]$$

We obtained

$$I_4=\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4}\eta\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)+const=\frac{1}{4}\eta\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)+const$$

As well as

$$I_8=\int\frac{dx}{x^8+1}=\frac{1}{8}\left[\eta\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)+\eta\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)\right]+const$$

$$=\frac{1}{8}\left[\eta\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)+\eta\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)\right]+const$$

For integral I_4, $\frac{\pi}{4}$ is an arc that is less than $\frac{\pi}{2}$. For integral I_8, $\frac{\pi}{8}$ and $\frac{3\pi}{8}$ are odd multiples of $\frac{\pi}{8}$ and also less than $\frac{\pi}{2}$. Coincidentally, for integral I_{16}, arcs of $\frac{\pi}{16}$, $\frac{3\pi}{16}$, $\frac{5\pi}{16}$, and $\frac{7\pi}{16}$ have appeared and are all odd multiples of $\frac{\pi}{16}$ and also less than $\frac{\pi}{2}$. The result remains consistent through another way of factoring as follow:

$$x^4+2x^2\cos\frac{\pi}{8}+1$$

$$=x^4+2x^2+1-2x^2+2x^2\cos\frac{\pi}{8}$$

$$=(x^2+1)^2-2x^2\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=(x^2+1)^2-4x^2\left(\sin\frac{\pi}{16}\right)^2$$

$$=\left(x^2-2x\sin\frac{\pi}{16}+1\right)\left(x^2+2x\sin\frac{\pi}{16}+1\right)$$

$$=\left(x^2-2x\cos\frac{7\pi}{16}+1\right)\left(x^2+2x\cos\frac{7\pi}{16}+1\right)$$

As well as

$$x^4 + 2x^2\cos\frac{3\pi}{8} + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 + 2x^2\cos\frac{3\pi}{8}$$

$$= (x^2+1)^2 - 2x^2\left(1 - \cos\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= (x^2+1)^2 - 4x^2\left(\sin\frac{3\pi}{16}\right)^2$$

$$= \left(x^2 - 2x\sin\frac{3\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\sin\frac{3\pi}{16} + 1\right)$$

$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{16} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{5\pi}{16} + 1\right)$$

Based on above presentation, we enable to build the conjecture:

$$I_{16} = \int \frac{dx}{x^{16}+1}$$

$$= \frac{1}{16}\left[\eta\left(\sin\frac{\pi}{16}\right) + \eta\left(\sin\frac{3\pi}{16}\right) + \eta\left(\sin\frac{5\pi}{16}\right) + \eta\left(\sin\frac{7\pi}{16}\right)\right] + const$$

$$= \frac{1}{16}\left[\eta\left(\cos\frac{\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{5\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{7\pi}{16}\right)\right] + const$$

Once the conjecture appears, what we have to do is proving that conjecture is true, in other words, we have to derive the predicted result. That is the reason why this section is named *"integrating by deriving"*. Indeed, forming:

$$F_{16}(x) = \frac{1}{16}\left[\eta\left(\cos\frac{\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{5\pi}{16}\right) + \eta\left(\cos\frac{7\pi}{16}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{3}\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}}\right.$$

$$\left. + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16} + 1}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16} + 1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2 \left[\frac{1}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}} + \frac{1}{4\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}}\ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}+1}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}+1}\right)\right]$$

Deriving the function $F_{16}(x)$:

$$F_{16}'(x) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2 \left[\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2} - \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2 \left[\frac{x^2+1}{x^4+1+\left(4\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2-2\right)x^2} - \frac{x^2-1}{x^4+1+\left(2-4\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2\right)x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\right)^2 \left[\frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{(2k+1)\pi}{8}} - \frac{x^2-1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{(2k+1)\pi}{8}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\cos\frac{\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{\pi}{8}} - \frac{x^2-1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{\pi}{8}}\right]\right.$$

$$+\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{3\pi}{8}} - \frac{x^2-1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}\right]$$

$$+\left(\cos\frac{5\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{5\pi}{8}} - \frac{x^2-1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{5\pi}{8}}\right]$$

$$\left.+\left(\cos\frac{7\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{7\pi}{8}} - \frac{x^2-1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{7\pi}{8}}\right]\right\}$$

Due to properties $(\cos\theta)^2 = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]^2$ and $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$, we continue to perform the derivative as follow:

$$F_{16}'(x) = \frac{1}{4}\left\{\left(\cos\frac{\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{1-x^2}{x^4+1-2x^2\cos\frac{\pi}{8}}\right]\right.$$

$$+\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{3\pi}{8}} + \frac{1-x^2}{x^4+1-2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}\right]$$

$$+\left(\sin\frac{3\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{3\pi}{8}} + \frac{1-x^2}{x^4+1+2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}\right]$$

$$\left.+\left(\sin\frac{\pi}{16}\right)^2\left[\frac{x^2+1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{1-x^2}{x^4+1+2x^2\cos\frac{\pi}{8}}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\left(\cos\frac{\pi}{16}\right)^2 (x^2+1) + \left(\sin\frac{\pi}{16}\right)^2 (1-x^2)}{x^4+1+2x^2\cos\frac{\pi}{8}}\right.$$

$$+ \frac{\left(\cos\frac{\pi}{16}\right)^2 (1-x^2) + \left(\sin\frac{\pi}{16}\right)^2 (x^2+1)}{x^4+1-2x^2\cos\frac{\pi}{8}}$$

$$+ \frac{\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right)^2 (x^2+1) + \left(\sin\frac{3\pi}{16}\right)^2 (1-x^2)}{x^4+1+2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}$$

$$\left.+ \frac{\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right)^2 (1-x^2) + \left(\sin\frac{3\pi}{16}\right)^2 (x^2+1)}{x^4+1-2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1+x^2\cos\frac{\pi}{8}}{x^4+1+2x^2\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{1-x^2\cos\frac{\pi}{8}}{x^4+1-2x^2\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{1+x^2\cos\frac{3\pi}{8}}{x^4+1+2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}\right.$$

$$\left.+ \frac{1-x^2\cos\frac{3\pi}{8}}{x^4+1-2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}\right]$$

In the above, we have applied properties $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ and $(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 = \cos(2\theta)$.

Returning to $F'_{16}(x)$:

$$F'_{16}(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{\pi}{8}}\right.$$

$$+ x^2\cos\frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{\pi}{8}}\right)$$

$$+ \frac{1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{3\pi}{8}} + \frac{1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}$$

$$\left.+ x^2\cos\frac{3\pi}{8}\left(\frac{1}{x^4+1+2x^2\cos\frac{3\pi}{8}} - \frac{1}{x^4+1-2x^2\cos\frac{3\pi}{8}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2(x^4+1)}{x^8+1-2x^4\cos\frac{\pi}{4}} - \frac{4x^4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{x^8+1-2x^4\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{2(x^4+1)}{x^8+1-2x^4\cos\frac{3\pi}{4}} - \frac{4x^4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{x^8+1-2x^4\cos\frac{3\pi}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4+1}{x^8+1-2x^4\cos\frac{\pi}{4}} - \frac{2x^4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{x^8+1-2x^4\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{x^4+1}{x^8+1+2x^4\cos\frac{\pi}{4}} - \frac{2x^4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{x^8+1+2x^4\cos\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4+1-2x^4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{x^8+1-2x^4\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{x^4+1-2x^4\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2}{x^8+1+2x^4\cos\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x^4+1)\left(\frac{1}{x^8-\sqrt{2}x^4+1} + \frac{1}{x^8+\sqrt{2}x^4+1}\right) - 2x^4\left(\frac{\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{x^8-\sqrt{2}x^4+1} + \frac{\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2}{x^8+\sqrt{2}x^4+1}\right)\right]$$

$$F'_{16}(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{2(x^4+1)(x^8+1)}{x^{16}+1} - \frac{2x^4\left(\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2\left(x^8+\sqrt{2}x^4+1\right) + \left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2\left(x^8-\sqrt{2}x^4+1\right)\right)}{x^{16}+1}\right]$$

$$F'_{16}(x) = \frac{(x^4+1)(x^8+1) - x^4(x^8+1) - \sqrt{2}x^8\left[\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 - \left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2\right]}{x^{16}+1}$$

$$F'_{16}(x) = \frac{x^8 + 1 - \sqrt{2}x^8 \left[\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 - \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2\right]}{x^{16} + 1}$$

$$F'_{16}(x) = \frac{x^8 + 1 - \sqrt{2}x^8 \cos\frac{\pi}{4}}{x^{16} + 1}$$

$$F'_{16}(x) = \frac{1}{x^{16} + 1}$$

Thus,

$$I_{16} = \int \frac{dx}{x^{16} + 1} = F_{16}(x) + const$$

In a full expression:

$$I_{16} = \int \frac{dx}{x^{16} + 1}$$

$$= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{3} \cos\frac{(2k+1)\pi}{16}\left[2\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{16}} + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16} + 1}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{16} + 1}\right)\right] + const$$

It is noticeable that:

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4}\left[2\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2\cos\frac{\pi}{4}} + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cos\frac{\pi}{4} + 1}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{4} + 1}\right)\right] + const$$

And

$$I_8 = \int \frac{dx}{x^8 + 1}$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{1} \cos\frac{(2k+1)\pi}{8}\left[2\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{8}} + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{8} + 1}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{8} + 1}\right)\right] + const$$

Those results bring back a key point for us to build a generalized conjecture, which will be discussed in the nest section.

6. $\mathrm{N} = 2^{\mathrm{n}}$: The Symphony No. 2^{n}

6.1. Overtune

Based on calculated integrals I_4, I_8, and I_{16} as presented in previous sections, we enable to predict a conjecture for the generalized problem, i.e.

$$
\begin{aligned}
I_{2^n} &= \int \frac{dx}{1+x^{2^n}} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.+\ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}\right)\right]\right\}+const
\end{aligned}
$$

As an overtune, we shall discuss: *why* $2^{n-2}-1$*?*

Firstly, the process of factoring gives us:

$$x^{2^n}+1=0 \Leftrightarrow x^{2^n}=-1 \Leftrightarrow x^{2^n}=\cos\pi+i\sin\pi$$

Of which ω ($\omega\in\mathbb{C}$) are roots of equation $\omega^{2^n}=-1$, we get:

$$
\begin{aligned}
\omega_k &= \cos\frac{\pi+k2\pi}{2^n}+i\sin\frac{\pi+k2\pi}{2^n} \quad (k=\overline{0;2^n-1}) \\
&= \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n} \quad (k=\overline{0;2^n-1})
\end{aligned}
$$

By definition,

$$
\begin{aligned}
\omega_{2^n-1-k} &= \cos\frac{[2(2^n-1-k)+1]\pi}{2^n}+i\sin\frac{[2(2^n-1-k)+1]\pi}{2^n} \\
\omega_{2^n-1-k} &= \cos\frac{(2^{n+1}-1-2k)\pi}{2^n}+i\sin\frac{(2^{n+1}-1-2k)\pi}{2^n} \\
\omega_{2^n-1-k} &= \cos\left[2\pi-\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right]+i\sin\left[2\pi-\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right] \\
\omega_{2^n-1-k} &= \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}-i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}
\end{aligned}
$$

Consequently,

$$
\begin{cases}
\omega_k+\omega_{2^n-1-k} = 2\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2^n} \\
\omega_k\omega_{2^n-1-k} = \left[\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2^n}\right]^2+\left[\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2^n}\right]^2 = 1
\end{cases}
\quad (k=\overline{0;2^n-1})
$$

According to Vieta's theorem, ω_k and ω_{2^n-1-k} are two roots of the equation:

$$x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1 = 0$$

Thus,

$$x^{2^n} + 1 = \prod_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left[x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1\right]$$

In the above process of factoring, there is a total of 2^n elements, from element $k = 0$ to element $k = 2^n - 1$. In those 2^n elements, it is optional to choose any element k and then element $2^n - 1 - k$. Therefore, no matter how element k is chosen, either from element $k = 0$ to element $k = 2^{n-1} - 1$ (i.e. k belongs to the front half of total 2^n elements), or from element $k = 2^{n-1}$ to element $k = 2^n - 1$ (i.e. k belongs to the back half of total 2^n elements), the result of determining k and $2^n - 1 - k$ remains unchanged. This symmetric property is just like $C_n^k = C_n^{n-k}$.

This is so-called the *Symmetric proposition for* 2^n *elements*. As illustrated above, k is chosen in the front half, i.e. from element $k = 0$ to element $k = 2^{n-1} - 1$.

Besides, putting

$$\mathrm{P}_k(x) = x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1 \quad (k = \overline{0; 2^n - 1})$$

Then by definition,

$$\mathrm{P}_{2^{n-1}-1-k}(x) = x^2 - 2x\cos\frac{[2(2^{n-1} - 1 - k) + 1]\pi}{2^n} + 1$$

$$\mathrm{P}_{2^{n-1}-1-k}(x) = x^2 - 2x\cos\frac{(2^n - 1 - 2k)\pi}{2^n} + 1$$

$$\mathrm{P}_{2^{n-1}-1-k}(x) = x^2 - 2x\cos\left[\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right] + 1$$

$$\mathrm{P}_{2^{n-1}-1-k}(x) = x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1$$

Applying *Symmetric proposition for* 2^{n-1} *elements*, for k chosen from the front half (i.e. from element $k = 0$ to element $k = 2^{n-2} - 1$), we can rewrite thee factoring result as follow:

$$x^{2^n}+1=\prod_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left[x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1\right]\left[x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1\right]$$

Above discussions are the first answer for the question: *why* $2^{n-2}-1$?

Secondly, looking back to calculated integrals I_4, I_8, and I_{16} and considering the function

$$\eta(t)=t\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2t}+\ln\left(\frac{x^2+2xt+1}{x^2-2xt+1}\right)\right]$$

Then

$$I_4=\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4}\eta\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)+const=\frac{1}{4}\eta\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)+const$$

$$I_8=\int\frac{dx}{x^8+1}=\frac{1}{8}\left[\eta\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)+\eta\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)\right]+const$$

$$=\frac{1}{8}\left[\eta\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)+\eta\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)\right]+const$$

And

$$I_{16}=\int\frac{dx}{x^{16}+1}$$

$$=\frac{1}{16}\left[\eta\left(\sin\frac{\pi}{16}\right)+\eta\left(\sin\frac{3\pi}{16}\right)+\eta\left(\sin\frac{5\pi}{16}\right)+\eta\left(\sin\frac{7\pi}{16}\right)\right]+const$$

$$=\frac{1}{16}\left[\eta\left(\cos\frac{\pi}{16}\right)+\eta\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right)+\eta\left(\cos\frac{5\pi}{16}\right)+\eta\left(\cos\frac{7\pi}{16}\right)\right]+const$$

Hence, we could build a conjecture for the generalized integral as follow:

$$I_{2^n}=\int\frac{dx}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k_0}\eta(\sin\alpha_k)+const=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k_0}\eta(\cos\alpha_k)+const$$

Besides the fact that $k\geq 0$, the supermum of k should satisfy that

$$\alpha_k=\frac{(2k+1)\pi}{2^n}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 2k+1<2^{n-1}$$

In other words, let k_0 be the *strongest* number such that $k\leq k_0$, we get:

$$2k_0+1=2^{n-1}-1\Leftrightarrow 2k_0=2^{n-1}-2\Leftrightarrow k_0=2^{n-2}-1$$

This is why the summation is from element $k=0$ to $k=k_0=2^{n-2}-1$.

Conseuently, the generalized conjecture is true for $2^{n-2}-1\geq 0\Leftrightarrow n\geq 2$.

6.2. *The Symphony*

I. Molto Allegro

We shall prove that:

$$I_{2^n} = \int \frac{dx}{1 + x^{2^n}}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \left\{ \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} \left[2\tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1} \right) \right] \right\} + const \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

Denoting:

$$\begin{cases} I_4^+(\lambda) = \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + \lambda x^2 + 1} dx \\ I_4^-(\lambda) = \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + \lambda x^2 + 1} dx \end{cases}$$

Of which λ is a given real number.

For $\lambda = -2\cos\theta$:

$$I_4^+(-2\cos\theta) = \int \frac{x^2 + 1}{x^4 - 2x^2\cos\theta + 1} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\cos\theta} dx$$

$$= \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 - 2\cos\theta} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$= I_4^+(-2\cos\theta) = \frac{1}{2}\csc\frac{\theta}{2}\tan^{-1}\frac{x - \frac{1}{x}}{2\sin\frac{\theta}{2}} + const$$

And

$$I_4^-(-2\cos\theta) = \int \frac{x^2-1}{x^4-2x^2\cos\theta+1}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-2\cos\theta}dx$$

$$= \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2-2\cos\theta} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sec\frac{\theta}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-2\cos\frac{\theta}{2}}{x+\frac{1}{x}+2\cos\frac{\theta}{2}}\right| + const$$

$$= \frac{1}{4}\sec\frac{\theta}{2}\ln\left(\frac{x^2-2x\cos\frac{\theta}{2}+1}{x^2+2x\cos\frac{\theta}{2}+1}\right) + const$$

Forming the function $F_{2^n}(x)$ as follow:

$$F_{2^n}(x)$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\left[2\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}\right)\right]\right\} + const$$

Of which

$$\alpha_k = \frac{(2k+1)\pi}{2^n} \quad \left(k = \overline{0; 2^{n-2}-1}\right)$$

Where arcs α_k are all odd multiples of $\frac{\pi}{2^n}$ and less than $\frac{\pi}{2}$. Thanks to above results of $I_4^+(-2\cos\theta)$ and $I_4^-(-2\cos\theta)$, the function $F_{2^n}(x)$ could be transformed as:

$$F_{2^n}(x)$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left[2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}\right.$$

$$\left.+\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\ln\left(\frac{x^2+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}+1}\right)\right] + const$$

$F_{2^n}(x)$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left[2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}\right.$$

$$\left.+\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}+2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}{x+\frac{1}{x}-2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}\right|\right]+const$$

$F_{2^n}(x)$

$$= \frac{1}{2^{n-2}}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left[\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)^2\csc\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)^2\sec\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}+2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}{x+\frac{1}{x}-2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}\right|\right]+const$$

II. Andante

This movement presents the derivative calculation of $F_{2^n}(x)$:

$F_{2^n}(x)$

$$= \frac{1}{2^{n-2}}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left[\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)^2\csc\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)^2\sec\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}+2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}{x+\frac{1}{x}-2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}\right|\right]+const$$

Then,

$F'_{2^n}(x)$

$$= \frac{1}{2^{n-2}}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left[\left(\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)^2\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\left(\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)^2}\right.$$

$$\left.+\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)^2\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)^2}\right]$$

$F'_{2^n}(x)$

$$= \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \left[\left(\sin \frac{(2k+1)\pi}{2^n} \right)^2 \frac{(x^2+1)}{x^4+1-2x^2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} + \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2^n} \right)^2 \frac{(1-x^2)}{x^4+1-2x^2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} \right]$$

$$F'_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \frac{1-x^2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}}{x^4+1-2x^2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}}$$

Let

$$\beta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}} \quad \left(k = \overline{0; 2^{n-2}-1}\right)$$

By definition,

$$\beta_{2^{n-2}-1-k} = \frac{[2(2^{n-2}-1-k)+1]\pi}{2^{n-1}}$$

$$\beta_{2^{n-2}-1-k} = \frac{(2^{n-1}-1-2k)\pi}{2^{n-1}}$$

$$\beta_{2^{n-2}-1-k} = \pi - \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}$$

$$\beta_{2^{n-2}-1-k} = \pi - \beta_k$$

Which implies:

$$\cos(\beta_{2^{n-2}-1-k}) = -\cos \beta_k$$

Applying *Symmetic proposition for* 2^{n-2} *elements*, choosing k and then determining $2^{n-2}-1-k$ does not depend on the position of k in a set of 2^{n-2} elements. Accordingly, this set could be separated into two halves, the front contains 2^{n-3} elements from $k = 0$ to $k = 2^{n-3}-1$, and the back contains 2^{n-3} remaining elements from $k = 2^{n-3}$ to $k = 2^{n-2}-1$.

Following up the above transformation:

$$F'_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} \left[\frac{1 - x^2 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}}{x^4 + 1 - 2x^2 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} + \frac{1 + x^2 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}}{x^4 + 1 + 2x^2 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} \right]$$

$$F'_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} \left[\frac{1}{x^4 + 1 - 2x^2 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} + \frac{1}{x^4 + 1 + 2x^2 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} + x^2 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{x^4 + 1 + 2x^2 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} - \frac{1}{x^4 + 1 - 2x^2 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}} \right) \right]$$

$$F'_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} \frac{2(x^4+1) - 4x^4 \left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}\right)^2}{x^8 + 1 - 2x^4 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-2}}}$$

$$F'_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n-3}} \sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} \frac{1 + x^4 \left[1 - 2\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}\right)^2\right]}{x^8 + 1 - 2x^4 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-2}}}$$

$$F'_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n-3}} \sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} \frac{1 - x^4 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-2}}}{x^8 + 1 - 2x^4 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-2}}}$$

Here come the arcs of

$$\gamma_k = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-2}} \quad \left(k = \overline{0; 2^{n-3}-1}\right)$$

III. Menuetto

This movement reveals whether there is any relations between α_k, β_k, and γ_k.

Putting

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{2^{n-m}} \sum_{k=0}^{2^{n-m}-1} \frac{1 - x^{2^{m-1}} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}{x^{2^m} + 1 - 2x^{2^{m-1}} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}$$

Forming $\Psi_m(x)$, we may rewrite:

$$F'_{2^n}(x) = \Psi_2(x) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \frac{1 - x^2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}}{x^4 + 1 - 2x^2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}}$$

As well as

$$F'_{2^n}(x) = \Psi_3(x) = \frac{1}{2^{n-3}} \sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} \frac{1 - x^4 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-2}}}{x^8 + 1 - 2x^4 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-2}}}$$

It is importantly noticeable that:

$$F'_{2^n}(x) = \Psi_2(x) = \Psi_3(x)$$

Before using this notification, it is necessary to ensure that $m \in \mathbb{N}$ and:

$$\begin{cases} m \geq 2 \\ 2^{n-m} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ 2^{n-m} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ n - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq n$$

Due to $\Psi_2(x) = \Psi_3(x)$, there should be a question on the relation between $\Psi_m(x)$ and $\Psi_{m+1}(x)$. If this relation actually exists, it is the key to clinch the generalized integral.

Expressing:

$$\Psi_{m+1}(x) = \frac{1}{2^{n-m-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} \frac{1 - x^{2^m} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m}}}{x^{2^{m+1}} + 1 - 2x^{2^m} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m}}}$$

Now, we shall prove that $\Psi_m(x) = \Psi_{m+1}(x)$ for $m \in \mathbb{N}$ and $2 \leq m < n$.

Denoting:

$$\phi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}} \quad \left(k = \overline{0; 2^{n-m} - 1}\right)$$

By definition:

$$\phi_{2^{n-m}-1-k} = \frac{[2(2^{n-m} - 1 - k) + 1]\pi}{2^{n-m+1}}$$

$$\phi_{2^{n-m}-1-k} = \frac{(2^{n-m+1} - 1 - 2k)\pi}{2^{n-m+1}}$$

$$\phi_{2^{n-m}-1-k} = \pi - \frac{(2k + 1)\pi}{2^{n-m+1}}$$

$$\phi_{2^{n-m}-1-k} = \pi - \phi_k$$

Which implies:

$$\cos(\phi_{2^{n-m}-1-k}) = -\cos\phi_k$$

Applying *Symmetric proposition for* 2^{n-m} *elements*, we may transform:

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{2^{n-m}} \sum_{k=0}^{2^{n-m}-1} \frac{1 - x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}{x^{2^m} + 1 - 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}$$

$$\Psi_m(x)$$
$$= \frac{1}{2^{n-m}} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} \left[\frac{1 - x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}{x^{2^m} + 1 - 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}\right.$$
$$\left. + \frac{1 + x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}{x^{2^m} + 1 + 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}\right]$$

$$\Psi_m(x)$$
$$= \frac{1}{2^{n-m}} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} \left[\frac{1}{x^{2^m} + 1 - 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}\right.$$
$$+ \frac{1}{x^{2^m} + 1 + 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}$$
$$+ x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}} \left(\frac{1}{x^{2^m} + 1 + 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{x^{2^m} - 1 + 2x^{2^{m-1}} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}}\right)\right]$$

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{2^{n-m}} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} \frac{2\left(x^{2^{m+1}}+1\right) - 4x^{2^m}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}\right)^2}{x^{2^{m+1}}+1-2x^{2^m}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m}}}$$

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{2^{n-m-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} \frac{1 + x^{2^m}\left[1-2\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m+1}}\right)^2\right]}{x^{2^{m+1}}+1-2x^{2^m}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m}}}$$

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{2^{n-m-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-m-1}-1} \frac{1 - x^{2^m}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m}}}{x^{2^{m+1}}+1-2x^{2^m}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-m}}}$$

$$\Psi_m(x) = \Psi_{m+1}(x)$$

So, we have proved that $\Psi_m(x) = \Psi_{m+1}(x)$ for $m \in \mathbb{N}$ and $2 \leq m < n$.

This results in:

$$F'_{2^n}(x) = \Psi_2(x) = \Psi_3(x) = \cdots = \Psi_{n-1}(x) = \Psi_n(x) \quad \forall n: \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases}$$

Therefore, QED is obtained as per the expression of $\Psi_n(x)$. Indeed:

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{2^{n-n}} \sum_{k=0}^{2^{n-n}-1} \frac{1 - x^{2^{n-1}}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-n+1}}}{x^{2^n}+1-2x^{2^{n-1}}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-n+1}}}$$

$$\Psi_n(x) = \sum_{k=0}^{0} \frac{1 - x^{2^{n-1}}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}}{x^{2^n}+1-2x^{2^{n-1}}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}}$$

$$\Psi_n(x) = \frac{1 - x^{2^{n-1}}\cos\frac{\pi}{2}}{x^{2^n}+1-2x^{2^{n-1}}\cos\frac{\pi}{2}}$$

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{x^{2^n}+1}$$

As

$$F'_{2^n}(x) = \Psi_n(x) = \frac{1}{x^{2^n}+1} \quad \forall n: \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases}$$

Which means:

$$F_{2^n}(x) = \int \frac{dx}{x^{2^n}+1} \quad \forall n: \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases}$$

QED.

IV. Allegro assai

The proof is granted upon the completion of Movement III – *Menuetto.* The conclusion is presented in Movement IV – *Allegro assai*.

We have proved that

$$F_{2^n}(x) = \int \frac{dx}{x^{2^n}+1} \quad \forall n: \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases}$$

Which means

$$I_{2^n} = \int \frac{dx}{1+x^{2^n}}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \left\{ \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} \left[2\tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1} \right) \right] \right\} + const \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

This is such a beautiful expression, which could also be written as

$$I_{2^n} = \int \frac{dx}{1+x^{2^n}}$$

$$I_{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \left\{ \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} \left[2\tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} + \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1} \right) \right] \right\} + const$$

$$I_{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \left[2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} + \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} \ln\left(\frac{x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n} + 1} \right) \right] + const$$

$$I_{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left[2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}} + \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}+2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}{x+\frac{1}{x}-2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}}\right|\right] + const$$

Furthermore, we may denote:

$$\begin{cases} f_{(\theta)}(x) = 2\tan^{-1}\dfrac{x-\frac{1}{x}}{2\sin\theta} \\ g_{(\theta)}(x) = \ln\left|\dfrac{x+\frac{1}{x}+2\cos\theta}{x+\frac{1}{x}-2\cos\theta}\right| \end{cases}$$

Then the result of I_{2^n} could be expressed as:

$$I_{2^n} = \int\frac{dx}{1+x^{2^n}}$$

$$I_{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\left[\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}f_{\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)}(x) + \cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}g_{\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^n}\right)}(x)\right] + const$$

Of which, n is an integer and $n \geq 2$.

6.3. Encore

Looking back, what we can find may be the beauty of the generalized integral as well as its solution. Of which, the key for us to reach the treasure should be function $\Psi_m(x)$. Accordingly, the relation $\Psi_m(x) = \Psi_{m+1}(x)$ is just like a bridge to heaven.

Interestingly, although $\Psi_m(x)$ is an x-variable function, the gold is found thanks to m. We seemed to perform the *integration by substitution* from variable x to variable m in order to reach the goal. Indeed, the technique of *integration by substitution* has been performed in this paper. However, the *substitution* from *x* to *m* is truly the game-changing move.

Besides, with the relation between $\Psi_m(x)$ and $\Psi_{m+1}(x)$, we may comment that the generalized integral in this section is calculated based on *integration by substitution* and *mathematical induction*.

7. Generalization: $\mathbf{N = 2s + 1}$ $(\mathbf{s} \in \mathbb{N}^+)$

This section discusses on the generalized integral I_{2s+1}:

$$I_{2s+1} = \int \frac{dx}{x^{2s+1} + 1} \quad (s \in \mathbb{N}^+)$$

In the introducing section, integral I_3 was calculated as follow:

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3}\left(\int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{-x + 2}{x^2 - x + 1} dx\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{-2x\cos\frac{\pi}{3} + 2}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{3} + 1} dx\right)$$

In Sub-Section 3.2, integral I_5 was calculated as follow:

$$I_5 = \int \frac{dx}{x^5 + 1}$$
$$= \frac{1}{5}\left(\int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{-x^3 + 2x^2 - 3x + 4}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1} dx\right)$$
$$= \frac{1}{5}\left(\int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{-2x\cos\frac{\pi}{5} + 2}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{5} + 1} dx + \int \frac{-2x\cos\frac{3\pi}{5} + 2}{x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{5} + 1} dx\right)$$

Based on above results, we may build a conjecture for integral I_{2s+1} as follow:

$$I_{2s+1} = \int \frac{dx}{x^{2s+1} + 1}$$
$$= \frac{1}{2s + 1}\left(\int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{\sum_{p=0}^{2s-1}(-1)^p(2s - p)x^p}{\sum_{q=0}^{2s}(-1)^q x^q} dx\right)$$
$$= \frac{1}{2s + 1}\left(\int \frac{dx}{x + 1} + \sum_{j=0}^{s-1}\int \frac{-2x\cos\frac{(2j + 1)\pi}{2s + 1} + 2}{x^2 - 2x\cos\frac{(2j + 1)\pi}{2s + 1} + 1} dx\right)$$

Therefore, it is supposed to prove the following so-called $2s + 1$ *equality*:

$$\frac{1}{x + 1} + \sum_{j=0}^{s-1}\frac{-2x\cos\frac{(2j + 1)\pi}{2s + 1} + 2}{x^2 - 2x\cos\frac{(2j + 1)\pi}{2s + 1} + 1} = \frac{2s + 1}{x^{2s+1} + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Let complex numbers ω_j be roots of the equation $x^{2s+1} + 1 = 0$. Factoring:

$$\omega_j^{2s+1} = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$\Leftrightarrow \omega_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} + i\sin\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} \quad (j = \overline{0;2s})$$

By the the property of complex conjugates:

$$\begin{aligned}\omega_{2s-j} &= \cos\frac{(4s-2j+1)\pi}{2s+1} + i\sin\frac{(4s-2j+1)\pi}{2s+1}\\ &= \cos\frac{[4s+2-(2j+1)]\pi}{2s+1} + i\sin\frac{[4s+2-(2j+1)]\pi}{2s+1}\\ &= \cos\left[2\pi - \frac{(2j+1)\pi}{2s+1}\right] + i\sin\left[2\pi - \frac{(2j+1)\pi}{2s+1}\right]\\ &= \cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} - i\sin\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}\end{aligned}$$

Therefore, we get:

$$\begin{cases}\omega_j + \omega_{2s-j} = 2\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{2s+1}\\ \omega_j\omega_{2s-j} = 1\\ \omega_s = -1\end{cases}$$

In other words,

$$x^2 - 2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 1 = (x-\omega_j)(x-\omega_{2s-j})$$

Generalizing:

$$x^{2s+1} + 1 = \prod_{j=0}^{2s}(x-\omega_j)$$

Considering function $L(\delta)$ as defined in Sub-Section 3.1:

$$L(\delta) = \int \frac{-2x\cos\delta + 2}{x^2 - 2x\cos\delta + 1}dx$$

The partial fraction decomposition method requires to find two real numbers A and B such that:

$$\frac{-2x\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 2}{x^2 - 2x\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 1} = \frac{A}{x-\omega_j} + \frac{B}{x-\omega_{2s-j}} \quad \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{\omega_j; \omega_{2s-j}\}$$

The above results in:

$$A(x-\omega_{2s-j}) + B(x-\omega_j) \equiv -2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 2$$

$$\Leftrightarrow (A+B)x - \left(A\omega_{2s-j} + B\omega_j\right) \equiv -2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 2$$

Which leads to the system of equations:

$$\begin{cases} A + B = -2\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{2s+1} \\ A\omega_{2s-j} + B\omega_j = -2 \end{cases} \Leftrightarrow (A;B) = \left(-\omega_j; -\omega_{2s-j}\right)$$

Returning to prove the $2s+1$ *equality*:

$$\frac{1}{x+1} + \sum_{j=0}^{s-1} \frac{-2x\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 2}{x^2 - 2x\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 1}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \sum_{j=0}^{s-1} \frac{-2x\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{2s+1} + 2}{\left(x-\omega_j\right)\left(x-\omega_{2s-j}\right)}$$

$$= \frac{-\omega_s}{x-\omega_s} + \sum_{j=0}^{s-1}\left(\frac{-\omega_j}{x-\omega_j} + \frac{-\omega_{2s-j}}{x-\omega_{2s-j}}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2s} \frac{-\omega_j}{x-\omega_j}$$

$$= \sum_{j=0}^{2s}\left(1 - \frac{x}{x-\omega_j}\right)$$

$$= 2s+1 - x\sum_{j=0}^{2s}\frac{1}{x-\omega_j}$$

$$= 2s+1 - x\left[\frac{\frac{dy}{dx}\prod_{j=0}^{2s}\left(x-\omega_j\right)}{\prod_{j=0}^{2s}\left(x-\omega_j\right)}\right]$$

$$= 2s+1 - \frac{x\frac{dy}{dx}\left(x^{2s+1}+1\right)}{x^{2s+1}+1}$$

$$= 2s+1 - (2s+1)\frac{x^{2s+1}}{x^{2s+1}+1}$$

$$= \frac{2s+1}{x^{2s+1}+1}$$

QED. This leads to the following result of the generalized integral I_{2s+1}:

$$I_{2s+1} = \int \frac{dx}{x^{2s+1}+1}$$

$$= \frac{1}{2s+1}\left[\int \frac{dx}{x+1} + \sum_{j=0}^{s-1}\int \frac{-2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}+2}{x^2-2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}+1}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2s+1}\left\{\int \frac{dx}{x+1} + \sum_{j=0}^{s-1} L\left[\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2s+1}\left\{\ln|x+1|\right.$$

$$+ \sum_{j=0}^{s-1}\left[-\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}\ln\left(x^2-2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}+1\right)\right.$$

$$\left.\left. + 2\sin\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}\tan^{-1}\frac{x-\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}}{\sin\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}}\right]\right\} + const$$

On the other hand, the above generalized result could be rewritten under complex logarithms as follow:

$$I_{2s+1} = \int \frac{dx}{x^{2s+1}+1}$$

$$= \frac{1}{2s+1}\int\left[\frac{1}{x+1} + \sum_{j=0}^{s-1}\frac{-2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}+2}{x^2-2x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2s+1}+1}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2s+1}\int\left(\sum_{j=0}^{2s}\frac{-\omega_j}{x-\omega_j}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2s+1}\sum_{j=0}^{2s}\left[-\omega_j\ln\left(x-\omega_j\right)\right] + const$$

Noticeably, the above expression is also true for $s=0$ and help build a conjecture for integral I_{2r} which will be discussed in the next section.

8. Generalization: $\mathbf{N = 2r}$ $(\mathbf{r} \in \mathbb{N}; \mathbf{r} \geq \mathbf{2})$

This section discusses on the generalized integral I_{2r}:

$$I_{2r} = \int \frac{dx}{x^{2r}+1} \quad (\mathbf{r} \in \mathbb{N}; \mathbf{r} \geq \mathbf{2})$$

Reminding the partial fraction decomposition for integral I_4 as presented in Sub-Section 2.1:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{-2x\cos\frac{\pi}{4}+2}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{4}+1} + \frac{-2x\cos\frac{3\pi}{4}+2}{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{4}+1}\right)$$

Besides, based on results of integrals I_8 and I_{16} as presented in Section 4 and Section 5, respectively, we enable to predict the so-called $2r$ *equality* as follow:

$$\sum_{l=0}^{r-1} \frac{-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+2}{x^2-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+1} = \frac{2r}{x^{2r}+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Let complex numbers ω_l be roots of the equation $x^{2r}+1=0$. We get:

$$\omega_l^{2r} = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$\Leftrightarrow \omega_l = \cos\frac{(2l+1)\pi}{2r} + i\sin\frac{(2l+1)\pi}{2r} \quad (l = \overline{0; 2r-1})$$

By the the property of complex conjugates:

$$\omega_{2r-1-l} = \cos\frac{(4r-2l-1)\pi}{2r} + i\sin\frac{(4r-2l-1)\pi}{2r}$$

$$= \cos\frac{[4r-(2l+1)]\pi}{2r} + i\sin\frac{[4r-(2l+1)]\pi}{2r}$$

$$= \cos\left[2\pi - \frac{(2l+1)\pi}{2r}\right] + i\sin\left[2\pi - \frac{(2l+1)\pi}{2r}\right]$$

$$= \cos\frac{(2l+1)\pi}{2r} - i\sin\frac{(2l+1)\pi}{2r}$$

The above results in:

$$\begin{cases} \omega_l + \omega_{2r-1-l} = 2\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r} \\ \omega_l\omega_{2r-1-l} = 1 \end{cases}$$

In other words,

$$x^2 - 2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r} + 1 = (x-\omega_l)(x-\omega_{2r-1-l})$$

Generalizing:

$$x^{2r} + 1 = \prod_{j=0}^{2r-1}(x-\omega_l)$$

Similar to the calculation as performed in Section 7:

$$\sum_{l=0}^{r-1}\frac{-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+2}{x^2-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+1}$$

$$= \sum_{l=0}^{r-1}\frac{-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+2}{(x-\omega_l)(x-\omega_{2r-1-l})}$$

$$= \sum_{l=0}^{r-1}\left(\frac{-\omega_l}{x-\omega_l}+\frac{-\omega_{2r-1-l}}{x-\omega_{2r-1-l}}\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{2r-1}\frac{-\omega_l}{x-\omega_l}$$

$$= \sum_{l=0}^{2r-1}\left(1-\frac{x}{x-\omega_l}\right)$$

$$= 2r - x\sum_{l=0}^{2r-1}\frac{1}{x-\omega_l}$$

$$= 2r - x\left[\frac{\frac{dy}{dx}\prod_{l=0}^{2r-1}(x-\omega_l)}{\prod_{l=0}^{2r-1}(x-\omega_l)}\right]$$

$$= 2r - \frac{x\frac{dy}{dx}(x^{2r}+1)}{x^{2r}+1}$$

$$= 2r - \frac{2rx^{2r}}{x^{2r}+1}$$

$$= \frac{2r}{x^{2r}+1}$$

QED. This leads to the following result of the generalized integral I_{2r}:

$$
\begin{aligned}
I_{2r} &= \int \frac{dx}{x^{2r}+1} \\
&= \frac{1}{2r}\int \left[\sum_{l=0}^{r-1} \frac{-2x\cos\dfrac{(2l+1)\pi}{2r}+2}{x^2-2x\cos\dfrac{(2l+1)\pi}{2r}+1}\right] dx \\
&= \frac{1}{2r}\sum_{l=0}^{r-1} L\left[\frac{(2l+1)\pi}{2r}\right] \\
&= \frac{1}{2r}\sum_{l=0}^{r-1}\Bigg[-\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}\ln\left(x^2-2x\cos\frac{(2l+1)\pi}{2r}+1\right) \\
&\qquad\qquad + 2\sin\frac{(2l+1)\pi}{2r}\tan^{-1}\frac{x-\cos\dfrac{(2l+1)\pi}{2r}}{\sin\dfrac{(2l+1)\pi}{2r}}\Bigg] + const
\end{aligned}
$$

The above result is true for N are even numbers, including the case of integral I_{2^n} as presented in Section 6. On the other hand, the above generalized result could be rewritten under complex logarithms as follow:

$$
\begin{aligned}
I_{2r} &= \int \frac{dx}{x^{2r}+1} \\
&= \frac{1}{2r}\int \left[\sum_{l=0}^{r-1} \frac{-2x\cos\dfrac{(2l+1)\pi}{2r}+2}{x^2-2x\cos\dfrac{(2l+1)\pi}{2r}+1}\right] dx \\
&= \frac{1}{2r}\int \left(\sum_{l=0}^{2r-1} \frac{-\omega_l}{x-\omega_l}\right) dx \\
&= \frac{1}{2r}\sum_{l=0}^{2r-1} [-\omega_l \ln(x-\omega_l)] + const
\end{aligned}
$$

The above result is also true for $r = 1$, which results in an interesting consequence:

$$
\frac{i}{2}\ln\left(\frac{x+i}{x-i}\right) - \tan^{-1} x = const
$$

9. Conclusion

From the results as obtained in Section 7 and Section 8, we get the following generalized integral:

$$I_N = \int \frac{dx}{1 + x^N} \quad (N \in \mathbb{N}^+)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{z=0}^{N-1} [-\omega_z \ln(x - \omega_z)] + const$$

Of which ω_z are roots of the equation $x^N = -1$, i.e.

$$\omega_z = \cos\frac{(2z+1)\pi}{N} + i\sin\frac{(2z+1)\pi}{N} = e^{\frac{(2z+1)i\pi}{N}} \quad (z = \overline{0; N-1})$$

Besides, for positive integer N, we can also develop the integral as follow:

$$I_{-N} = \int \frac{dx}{1 + x^{-N}} = \int \frac{x^N}{1 + x^N} dx = 1 - \int \frac{dx}{1 + x^N} = 1 - I_N$$

In other words, we enable to solve for the case that N are integers $(N \in \mathbb{Z})$.

The final result of the generalized integral is fairly obvious with a solution which is not so complicated. However, in order to find that result, the author has dealt with a process of calculation as detailed from Section 2 to Section 6. Introducing this paper, the author wishes to share the message *"glory presents not only at the destination, but also throughout the journey"*.