PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **September 1, 2017**.

The editor thanks Rolland Gaudet, retired professor of Université de Saint-Boniface in Winnipeg, for translations of the problems.

4201. *Proposed by Florin Stanescu.*

Let M be a point in the interior of a regular polygon $A_1A_2\dots A_n$ inscribed in the unit circle centered at O, and let A_kB_k be the chord from the vertex A_k through M. Prove that

$$\frac{A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + \cdots + A_nB_n^2}{n} \geq \frac{4}{1+OM^2}.$$

4202. *Proposed by Roy Barbara.*

Let $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfying

$$f(a^2 + b^2) = f(a)^2 + f(b)^2$$

for all $a, b \in \mathbb{N}$.

4203. *Proposed by Michel Bataille.*

The incircle of a triangle ABC has centre I, radius r and intersects the line segments AI, BI, CI at A', B', C', respectively. Prove that

(a) $AA' \cdot BB' \cdot CC' \leq \frac{\sqrt{3}}{18}(AB + BC + CA)r^2$;

(b) $A'B' \cdot B'C' \cdot C'A' \leq 3\sqrt{3}\,r^3$.

4204. *Proposed by Leonard Giugiuc and Diana Trailescu.*

Let ABC be a triangle with $AB \neq AC$ and let I be the incenter of ABC. Suppose the lines AI, BI and CI intersect the sides BC, CA and AB in D, E and F, respectively. If $DE = DF$ and $\angle ABC = 2\angle ACB$, find $\angle ACB$.

4205. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Prove that for $0 < a < c < b, a, b, c \in \mathbb{R}$, we have

$$\frac{1}{c\sqrt{ab}}\int_a^b x \arctan x dx > \frac{(c-a)\arctan\sqrt{ac}}{\sqrt{bc}} + \frac{(b-c)\arctan\sqrt{bc}}{\sqrt{ac}}.$$

4206. *Proposed by Gheorghe Alexe and George-Florin Serban.*

Find positive integers p and q that are relatively prime to each other such that $p + p^2 = q + q^2 + 3q^3$.

4207. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let x, y and z be real numbers such that $x + y + z = 3$. Show that

$$\frac{1}{1 + 2^{4-3x}} + \frac{1}{1 + 2^{4-3y}} + \frac{1}{1 + 2^{4-3z}} \geq 1.$$

4208. *Proposed by Leonard Giugiuc, Daniel Sitaru and Marian Dinca.*

Let x, y and z be positive real numbers such that $x \leq y \leq z$. Prove that for any real number $k > 2$, we have:

$$xy^k + yz^k + zx^k \geq x^2y^{k-1} + y^2z^{k-1} + z^2x^{k-1}.$$

4209. *Proposed by Nguyen Viet Hung.*

Let m and n be distinct positive integers. Evaluate

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + nx)^m - (1 + mx)^n}{\sqrt[m]{1 + mx} - \sqrt[n]{1 + nx}}.$$

4210. *Proposed by Van Khea and Leonard Giugiuc.*

Let ABC be a triangle in which the circumcenter lies on the incircle. Furthermore, let $BC = a, CA = b$ and $AB = c$. For which triangles does the expression $\dfrac{a + b + c}{\sqrt[3]{abc}}$ attain its minimum?

. . . .

4201. *Proposé par Florin Stanescu.*

Soit M un point à l'intérieur d'un polygone régulier $A_1A_2 \dots A_n$ inscrit dans le cercle unitaire centré à O et soit A_kB_k la corde passant par A_k et M. Démontrer que

$$\frac{A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + \cdots + A_nB_n^2}{n} \geq \frac{4}{1 + OM^2}.$$

4202. *Proposé par Roy Barbara.*

Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaisant

$$f(a^2 + b^2) = f(a)^2 + f(b)^2$$

pour tout $a, b \in \mathbb{N}$.

4203. *Proposé par Michel Bataille.*

Le cercle inscrit du triangle ABC possède I comme centre et r comme rayon; il intersecte les segments AI, BI et CI en A', B' et C' respectivement. Démontrer que

(a) $AA' \cdot BB' \cdot CC' \leq \frac{\sqrt{3}}{18}(AB + BC + CA)r^2$;

(b) $A'B' \cdot B'C' \cdot C'A' \leq 3\sqrt{3}\,r^3$.

4204. *Proposé par Leonard Giugiuc et Diana Trailescu.*

Soit ABC un triangle tel que $AB \neq AC$ et soit I le centre de son cercle inscrit. Supposer que les lignes AI, BI et CI intersectent les côtés BC, CA et AB en D, E et F respectivement. Si $DE = DF$ et $\angle ABC = 2\angle ACB$, déterminer $\angle ACB$.

4205. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Pour $0 < a < c < b$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$, démontrer que

$$\frac{1}{c\sqrt{ab}} \int_a^b x \arctan x dx > \frac{(c-a)\arctan\sqrt{ac}}{\sqrt{bc}} + \frac{(b-c)\arctan\sqrt{bc}}{\sqrt{ac}}.$$

4206. *Proposé par Gheorghe Alexe et George-Florin Serban.*

Déterminer des entiers positifs p et q, relativement premiers, tels que

$$p + p^2 = q + q^2 + 3q^3.$$

4207. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soient x, y et z des nombres réels tels que $x + y + z = 3$. Démontrer que

$$\frac{1}{1 + 2^{4-3x}} + \frac{1}{1 + 2^{4-3y}} + \frac{1}{1 + 2^{4-3z}} \geq 1.$$

4208. *Proposé par Leonard Giugiuc, Daniel Sitaru et Marian Dinca.*

Soient x, y et z des nombres réels positifs tels que $x \leq y \leq z$. Démontrer que pour tout nombre réel $k > 2$, l'inégalité suivante tient:

$$xy^k + yz^k + zx^k \geq x^2y^{k-1} + y^2z^{k-1} + z^2x^{k-1}.$$

4209. *Proposé par Nguyen Viet Hung.*

Soient m et n des entiers positifs distincts. Évaluer

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+nx)^m - (1+mx)^n}{\sqrt[m]{1+mx} - \sqrt[n]{1+nx}}.$$

4210. *Proposé par Van Khea and Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle dont le centre du cercle circonscrit se trouve sur le cercle inscrit. Soient $BC = a, CA = b$ et $AB = c$. Pour quels triangles est-ce que l'expression $\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$ atteint son minimum?

Massachusetts Institute of Technology Entrance Examination, 1869-70 Geometry

1. Prove that the sum of the three angles of a plane triangle equals two right angles.
2. Prove that the diagonal of a parallelogram divides it into two equal triangles.
3. Prove that the area of a trapezoid is equal to the half sum of its parallel bases multiplied by its altitude.
4. Prove that the side of a regular hexagon inscribed in a circle is equal to its radius.
5. The radius of a circle equals 10. Find its area.
6. The perpendicular dropped from the vertex of the right angle upon the hypothenuse divides it into two segments of 9 and 16 feet respectively. Find the lengths of the perpendicular, and the two legs of the triangle.
7. Define similar polygons. To what are their areas proportional?

https://libraries.mit.edu/archives/exhibits/exam/

PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **1er octobre 2017**.

Un astérisque ($\star$) *signale un problème proposé sans solution.*

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

4211. *Proposé par Michel Bataille.*

Soient A et M deux matrices $n\times n$ avec valeurs complexes telles que A est inversible et M a rang égal à 1.

a) Evaluer $\mathrm{trace}(A^{-1}M)$ si $\det(A+M)=0$.

b) Déterminer $(A+M)^{-1}$ si $\det(A+M)\neq 0$.

4212. *Proposé par Florin Stanescu.*

Soient a, b et c les côtés d'un triangle, r le rayon du cercle inscrit et R le rayon du cercle circonscrit. Démontrer que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{r}{R}\leq 2.$$

4213. *Proposé par Oai Thanh Dao et Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle dont aucun angle dépasse 120° et soit I le centre de son cercle inscrit. Considérer des points $D\in AI$, $E\in BI$ et $F\in CI$ tels que

$$AD=\left(s-a-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)\cos\frac{A}{3},$$
$$BE=\left(s-b-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)\cos\frac{B}{3},$$
$$CF=\left(s-c-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)\cos\frac{C}{3},$$

où a, b et c sont les côtés opposés aux angles A, B et C respectivement et où s dénote le demi périmètre et r dénote le rayon du cercle inscrit. Démontrer que le triangle DEF est équilatéral.

4214. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Soit ABC un triangle dont tous les angles dépassent $\frac{\pi}{6}$. Déterminer

$$\min(\cos A \cos B \cos C).$$

4215. *Proposé par Gheorghe Alexe et George-Florin Serban.*

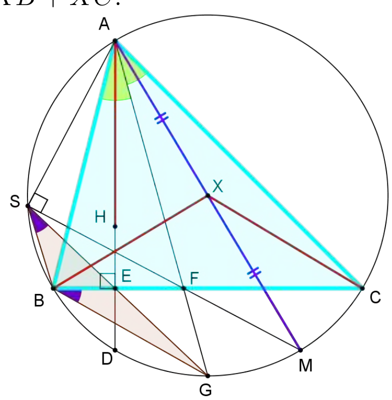
Déterminer des nombres naturels positifs a, b et c tels que

$$\frac{a+1}{b}, \quad \frac{b+1}{c} \quad \text{et} \quad \frac{c+1}{a}$$

sont tous des nombres naturels.

4216. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit ABC un triangle avec orthocentre H et cercle circonscrit Γ. Or, $AH \cap BC = \{E\}$, $AH \cap \Gamma = \{A, D\}$, la bissectrice de l'angle A intersecte BC en F et Γ en G, $EG \cap \Gamma = \{G, S\}$, puis $SF \cap \Gamma = \{S, M\}$. Si X est le mi point de AM, démontrer que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$.



4217. *Proposé par Dan Stefan Marinescu et Leonard Giugiuc.*

Soit $n \geq 3$ et soit $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ un polygone convexe cyclique dont le centre O du cercle circonscrit coïncide avec le centre de gravité. Soient M et N deux points distincts tels que O se situe sur le segment MN et $ON = (n-1)OM$. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} MA_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} NA_k.$$

4218. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Démontrer que pour tout $a, b, c \in (0, \infty)$ et tout nombre naturel $n \geq 3$, l'inégalité suivante tient

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{a+b+c} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{(a+b+c)^{n-1} + n - 1}.$$

4219. *Proposé par Nguyen Viet Hung.*

Soient a, b, c et d des entiers positifs distincts tels que

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a}$$

est un entier. Démontrer que $a+b+c+d$ n'est pas premier.

4220. *Proposé par Leonard Giugiuc, Daniel Sitaru et Hung Nguyen Viet.*

Soient s et r des nombres réels tels que $0 < r < s$ et soient $a, b, c \in [s-r, s+r]$ des nombres réels tels que $a+b+c = 3s$. Démontrer que

$$ab + bc + ca \geq 3s^2 - r^2 \quad \text{et} \quad abc \geq s^3 - sr^2.$$

. . . .

4211. *Proposed by Michel Bataille.*

Let A and M be two $n \times n$ matrices with complex entries such that A is invertible and M has rank 1.

a) Evaluate $\operatorname{trace}(A^{-1}M)$ if $\det(A+M) = 0$.

b) Find $(A+M)^{-1}$ if $\det(A+M) \neq 0$.

4212. *Proposed by Florin Stanescu.*

Let a, b and c be the sides of a triangle, r the inradius and R the circumradius. Show that

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{r}{R} \leq 2.$$

4213. *Proposed by Oai Thanh Dao and Leonard Giugiuc.*

Let ABC be a triangle with no angle more than 120° and let I be its incentre. Consider points $D \in AI$, $E \in BI$ and $F \in CI$ such that

$$AD = \left(s - a - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)\cos\frac{A}{3},$$
$$BE = \left(s - b - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)\cos\frac{B}{3},$$
$$CF = \left(s - c - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)\cos\frac{C}{3},$$

where a, b and c are sides opposite of angles A, B and C, respectively, s is the semiperimeter and r is the inradius of ABC. Prove that triangle DEF is equilateral.

4214. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Let ABC be a triangle with every angle bigger than $\frac{\pi}{6}$. Find $\min(\cos A \cos B \cos C)$.

4215. *Proposed by Gheorghe Alexe and George-Florin Serban.*

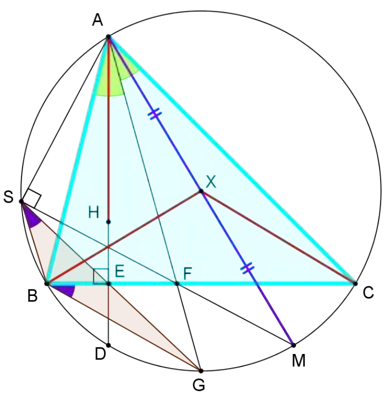
Find positive natural numbers a, b and c such that

$$\frac{a+1}{b}, \quad \frac{b+1}{c} \quad \text{and} \quad \frac{c+1}{a}$$

are all natural numbers.

4216. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let ABC be an acute triangle with orthocenter H and circumcircle Γ. Let $AH \cap BC = \{E\}$, $AH \cap \Gamma = \{A, D\}$, the bisector of angle A cuts BC in F and Γ in G, $EG \cap \Gamma = \{G, S\}$, $SF \cap \Gamma = \{S, M\}$. If X is the midpoint of AM, prove that $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$.



4217. *Proposed by Dan Stefan Marinescu and Leonard Giugiuc.*

Let $n \geq 3$ and consider a cyclic convex polygon $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ in which the circumcenter O coincides with the center of gravity. Let M and N be two distinct points such that O lies on the line segment MN and $ON = (n-1)OM$. Prove that

$$\sum_{k=0}^{n-1} MA_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} NA_k.$$

4218. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Prove that for all $a, b, c \in (0, \infty)$ and any natural number $n \geq 3$, we have

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{a+b+c} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{(a+b+c)^{n-1} + n - 1}.$$

4219. *Proposed by Nguyen Viet Hung.*

Let a, b, c and d be distinct positive integers such that

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a}$$

is a integer. Prove that $a + b + c + d$ is not prime.

4220. *Proposed by Leonard Giugiuc, Daniel Sitaru and Hung Nguyen Viet.*

Let s and r be real numbers with $0 < r < s$ and let $a, b, c \in [s - r, s + r]$ be real numbers such that $a + b + c = 3s$. Prove that

$$ab + bc + ca \geq 3s^2 - r^2 \quad \text{and} \quad abc \geq s^3 - sr^2.$$

PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **November 1, 2017**.

The editor thanks Rolland Gaudet, retired professor of Université de Saint-Boniface in Winnipeg, for translations of the problems.

4221. *Proposed by Nguyen Viet Hung.*

Let a, b, c, p, q be distinct positive real numbers satisfying

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} = p,$$
$$\frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2} = q.$$

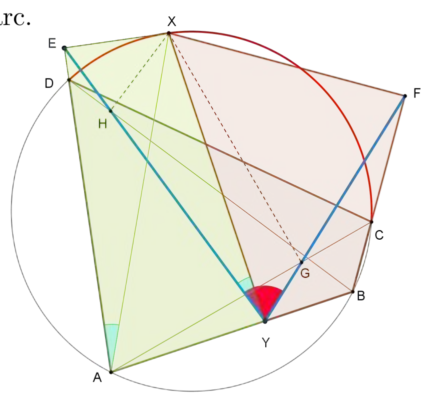
Evaluate

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}$$

in terms of p and q.

4222. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let $ABCD$ be a quadrilateral inscribed in a circle and X a mobile point on the small arc CD. If E, F, G, H are X orthogonal projections on AD, BC, AC, BD show that the angle between EH and GF is always constant, regardless of the position of X on the arc.



4223. *Proposed by Leonard Giugiuc and Dorin Marghidanu.*

Let a, b and c be positive real numbers such that $a + b + c \leq 1$. Prove that

$$\sqrt[3]{(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)} \geq 26abc.$$

4224. *Proposed by Michel Bataille.*

Find the complex roots of the polynomial

$$16x^6 - 24x^5 + 12x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1.$$

4225. *Proposed by Leonard Giugiuc, Daniel Dan and Daniel Sitaru.*

Prove that in any triangle ABC we have:

$$3(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) + \cos A \cos B + \cos A \cos C + \cos B \cos C \geq 3.$$

4226. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Prove that if $0 < a < b$ then:

$$\left(\int_a^b \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx\right)^2 > (b-a)^2 + \ln^2\left(\frac{b}{a}\right).$$

4227. *Proposed by Dan Marinescu and Leonard Giugiuc.*

Let P be a point in the interior of an equilateral triangle ABC whose sides have length 1, and let R' and r' be the circumradius and inradius of the triangle whose sides are congruent to PA, PB and PC (which exists by Pompeiu's theorem). Prove that

$$3R' \geq 1 \geq 6r'.$$

4228. *Proposed by Mihály Bencze.*

Let $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ such that $\sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n z_k^2 = 0$. Prove that

$$n \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \leq (n-2) \left(\sum_{k=1}^n |z_k|\right)^2.$$

4229. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let n be an integer with $n \geq 2$ and let p be a prime number with $p > n$. Consider an $n \times n$ matrix X over $\mathbb{Z}_p$ with $X^p = I_n$. Prove that $(X - I_n)^n = O_n$.

4230. *Proposed by Miguel Ochoa Sanchez and Leonard Giugiuc.*

Let ABC be a triangle in which $\angle B = 2\angle C$ and let M be the midpoint of BC. The internal bisector of $\angle ACB$ intersects AM in D. Prove that $\angle CDM \leq 45°$ and find $\angle C$ for which the equality holds.

. . . .

4221. *Proposé par Nguyen Viet Hung.*

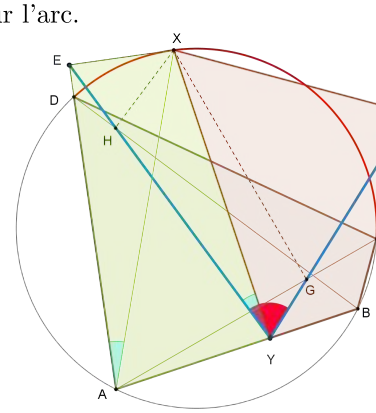
Soient a, b, c, p et q des nombres réels, positifs et distincts, tels que

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}=p,$$
$$\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}=q.$$

Évaluer
$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}$$
en termes de p et q.

4222. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle et soit X un point situé sur le petit arc CD. Si E, F, G et H sont les projections orthogonales de X vers AD, BC, AC et BD, démontrer que l'angle entre EH et GF est constant, quel que soit le point X sur l'arc.



4223. *Proposé par Leonard Giugiuc et Dorin Marghidanu.*

Soient a, b et c des nombres réels positifs tels que $a+b+c \leq 1$. Démontrer que

$$\sqrt[3]{(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)} \geq 26abc.$$

4224. *Proposé par Michel Bataille.*

Déterminer les racines complexes du polynôme

$$16x^6-24x^5+12x^4+8x^3-12x^2+6x-1.$$

4225. *Proposé par Leonard Giugiuc, Daniel Dan et Daniel Sitaru.*

Soit un triangle ABC. Démontrer que

$$3(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)+\cos A\cos B+\cos A\cos C+\cos B\cos C \geq 3.$$

4226. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Démontrer que si $0 < a < b$, alors

$$\left(\int_a^b \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx\right)^2 > (b-a)^2 + \ln^2\left(\frac{b}{a}\right).$$

4227. *Proposé par Dan Marinescu et Leonard Giugiuc.*

Soit P un point à l'intérieur du triangle équilatéral ABC ayant des côtés de longueur 1 et soient R' et r' les rayons des cercles circonscrit et inscrit du triangle dont les côtés sont congrus à PA, PB et PC, où ce dernier triangle existe en raison du théorème de Pompeiu. Démontrer que

$$3R' \geq 1 \geq 6r'.$$

4228. *Proposé par Mihály Bencze.*

Soient $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ tels que $\sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n z_k^2 = 0$. Démontrer que

$$n \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \leq (n-2) \left(\sum_{k=1}^n |z_k|\right)^2.$$

4229. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soit n un entier tel que $n \geq 2$ et soit p un nombre premier tel que $p > n$. Considérer une matrice $n \times n$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$ telle que $X^p = I_n$. Démontrer que

$$(X - I_n)^n = O_n.$$

4230. *Proposé par Miguel Ochoa Sanchez et Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle tel que $\angle B = 2\angle C$ et soit M le mi point de BC. La bissectrice interne de $\angle ACB$ intersecte AM en D. Démontrer que $\angle CDM \leq 45°$ et déterminer $\angle C$ pour lequel l'égalité tient.

PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **1er décembre 2017**.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

4231. *Proposé par Marius Stănean.*

Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique, soit $O = AC \cap BD$, soient M, N, P et Q les mi points de AB, BC, CD et DA respectivement et soient X, Y, Z et T les projections de O vers AB, BC, CD et DA respectivement. Soient $U = MP \cap YT$ et $V = NQ \cap XZ$. Démontrer que

$$\frac{UO}{VO} = \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DA}.$$

4232. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit n un enter positif. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1+k}{k} \binom{2n-1}{k} \frac{(-1)^k}{2^k} = 0.$$

4233. *Proposé par Peter Y. Woo.*

Résoudre le problème suivant sans trigonométrie.

Soit ABC un triangle où $\angle B > 90^\circ$. Dénoter par M le pied de l'altitude allant de C vers AB, et par N le pied de l'altitude allant de B vers AC. Si $AB = 2CM$ et $\angle ABN = \angle CBM$, déterminer $\angle A$.

4234. *Proposé par Leonard Giugiuc, Daniel Sitaru et Marian Dinca.*

Soient x, y et z des nombres réels tels que $x \geq y \geq z > 0$. Démontrer l'inégalité suivante, quel que soit $k \geq 0$

$$\frac{4}{x+3y+4k} + \frac{4}{y+3z+4k} + \frac{4}{z+3x+4k} \geq \frac{3}{x+2y+3k} + \frac{3}{y+2z+3k} + \frac{3}{z+2x+3k}.$$

4235. *Proposé par Ruben Dario Auqui et Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle isocèle où $BA = BC$ et soit I le centre de son cercle inscrit. Dénoter par X, Y et Z les points de tangence du cercle inscrit avec les côtés AB, AC et BC respectivement. Une ligne d passant par I intersecte les segments AX et CZ. Dénoter par a, b, c, x, y et z les distances vers la ligne d, à partir des points A, B, C, X, Y et Z respectivement. Démontrer que

$$\frac{a+c}{b} = \frac{x+z}{y}.$$

4236. *Proposé par Nguyen Viet Hung.*

Évaluer

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\frac{(k^2+2)^2}{k^4+4}}\right).$$

4237. *Proposé par Cristinel Mortici et Leonard Giugiuc.*

Pour un entier $n \geq 2$, déterminer toutes valeurs $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ telles que

i) $0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq 1 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_n$;

ii) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = 2n$; et

iii) $\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) = n^2 + 3n$.

4238. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit ABC un triangle et soit M un point arbitraire situé sur BC. Si X et Y sont les centres des cercles inscrits de triangle ABM et triangle AMC et s'il existe $Z \in (AM)$ pour lequel $BCZA$ et $CYZB$ sont des quadrilatères cycliques, déterminer $m,\ n \in \mathbb{R}$ donnant lieu à $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$.

4239. *Proposé par Leonard Giugiuc et Abdilkadir Altintas.*

Soit ABC un triangle et soit G son centroïde. Dénoter par D et E les mi points des côtés BC et AC respectivement. Si le quadrilatère $CDGE$ est cyclique, démontrer que

$$\cot A = \frac{2AC^2 - AB^2}{4 \cdot Area(ABC)}.$$

4240. *Proposé par Michael Rozenberg et Leonard Giugiuc.*

Soient a, b et c des nombres réels positifs tels que $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Démontrer que $1 + a + b + c \geq 4abc$.

. . . .

4231. *Proposed by Marius Stănean.*

Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral, $O = AC \cap BD$, M, N, P, Q be the midpoints of AB, BC, CD and DA, respectively, and X, Y, Z, T be the projections of O on AB, BC, CD and DA, respectively. Let $U = MP \cap YT$ and $V = NQ \cap XZ$. Prove that

$$\frac{UO}{VO} = \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DA}.$$

4232. *Proposed by Michel Bataille.*

Let n be a positive integer. Prove that

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1+k}{k} \binom{2n-1}{k} \frac{(-1)^k}{2^k} = 0.$$

4233. *Proposed by Peter Y. Woo.*

A high-school math teacher required her geometry students to solve this problem without trigonometry: Let ABC be a triangle where $\angle B > 90^\circ$. Denote by M the foot of the altitude from C to AB, and by N the foot of the altitude from B to AC. Then if $AB = 2CM$ and $\angle ABN = \angle CBM$, determine $\angle A$.

4234. *Proposed by Leonard Giugiuc, Daniel Sitaru and Marian Dinca.*

Let x, y and z be real numbers such that $x \geq y \geq z > 0$. Prove that for any $k \geq 0$ we have

$$\frac{4}{x+3y+4k} + \frac{4}{y+3z+4k} + \frac{4}{z+3x+4k} \geq \frac{3}{x+2y+3k} + \frac{3}{y+2z+3k} + \frac{3}{z+2x+3k}.$$

4235. *Proposed by Ruben Dario Auqui and Leonard Giugiuc.*

Let ABC be an isosceles triangle with $BA = BC$ and let I be its incentre. Denote by X, Y and Z the tangency points of the incircle and the sides AB, AC and CB, respectively. A line d passes through I intersecting the segments AX and CZ. Denote by a, b, c, x, y and z the distances from the points A, B, C, X, Y and Z to the line d, respectively. Prove that

$$\frac{a+c}{b} = \frac{x+z}{y}.$$

4236. *Proposed by Nguyen Viet Hung.*

Evaluate

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{\frac{(k^2+2)^2}{k^4+4}} \right).$$

4237. *Proposed by Cristinel Mortici and Leonard Giugiuc.*

For an integer $n \geq 2$, find all $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ so that

i) $0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq 1 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_n$;

ii) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = 2n$; and

iii) $\sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) = n^2 + 3n$.

4238. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let ABC be a triangle with M an arbitrary point on BC. If X, Y are centers of inscribed circles in $\triangle ABM$ and $\triangle AMC$ and if there exists $Z \in (AM)$ for which $BXZA$, $CYZB$ are cyclic quadrilaterals, find $m,\ n \in \mathbb{R}$ leading to $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$.

4239. *Proposed by Leonard Giugiuc and Abdilkadir Altintas.*

Let ABC be a triangle with centroid G. Denote by D and E the midpoints of the sides BC and AC, respectively. If the quadrilateral $CDGE$ is cyclic, prove that

$$\cot A = \frac{2AC^2 - AB^2}{4 \cdot Area(ABC)}.$$

4240. *Proposed by Michael Rozenberg and Leonard Giugiuc.*

Let a, b and c be positive real numbers such that $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Prove that $1 + a + b + c \geq 4abc$.

PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **January 1, 2018**.

The editor thanks Rolland Gaudet, retired professor of Université de Saint-Boniface in Winnipeg, for translations of the problems.

4241. *Proposed by Margarita Maksakova.*

Place the numbers $1, 2, \ldots, 11$ and some real number r on the edges of a cube so that at every vertex the sum of the numbers on the incident edges is the same. What is the smallest value of r for which this is possible?

4242. *Proposed by Mihály Bencze.*

Let $x_1 = 4$ and $x_{n+1} = [\sqrt[3]{2}x_n]$ for all $n \geq 1$, where $[\cdot]$ denotes the integer part function. Determine the largest positive $n \in \mathbb{N}$ for which x_n, x_{n+1}, x_{n+2} form an arithmetic progression.

4243. *Proposed by Dan Stefan Marinescu, Leonard Giugiuc and Hung Nguyen Viet.*

Let ABC be a triangle. Let I, r and R be the incenter, the inradius and the circumradius of ABC, respectively. Let D be the point of intersection of the line AI and the circumcircle of ABC. Similarly, define points E and F. Prove that

$$AD \cdot BE \cdot CF \geq 16rR^2.$$

4244. *Proposed by Michel Bataille.*

Let ABC be a triangle with no right angle and let H be its orthocenter. The parallel to BC through H intersects AB and AC at E and F and the perpendiculars through A to AB and AC at U and V, respectively. Let X and Y be the orthogonal projections of A onto BU and CV, respectively. Prove that E, F, X, Y are concyclic.

4245. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let ABC be an acute triangle with circumcircle Γ, and let t be its tangent at A. Define T and E to be the points where the circle with centre B and radius BA again intersects t and AC, respectively, while T' and F are the points where the circle with centre C and radius CA intersects t and AB, respectively. If X is the point where TE and $T'F$ intersect, and Y is the second point where the line AX intersects Γ, prove that BC is the perpendicular bisector of the line segment XY.

4246. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Find the best lower bound for $abc + abd + acd + bcd$ over all positive a, b, c and d satisfying
$$a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

4247. *Proposed by Missouri State University Problem Solving Group.*

Let B and C be two fixed points on a circle centered at O that are not diametrically opposite. Let A be a variable point on the circle distinct from B and C and not belonging to the perpendicular bisector of BC. Let M and N be the midpoints of the segments BC and AO, respectively. The line AM intersects the circle again at D, and finally, NM and OD intersect at P. Determine the locus of points P as A moves around the circle.

4248. *Proposed by Michel Bataille.*

Let n be a positive integer and let $p(x) = 1 + p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_n(x)$ where the polynomials $p_k(x)$ are defined by $p_0(x) = 2,\ p_1(x) = x^2 + 2$ and the recursion
$$p_{k+1}(x) = (x^2 + 2)p_k(x) - p_{k-1}(x)$$
for $k \in \mathbb{N}$. Find all the complex roots of $p(x)$.

4249. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Let a, b, c be real numbers with at most one of them equal to zero. Prove that
$$\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \le 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

4250. *Proposed by Michael Rozenberg and Leonard Giugiuc.*

Let ABC be an acute angle triangle such that $\sin A = \sin B \sin C$. Prove that
$$\tan A \tan B \tan C \ge \frac{16}{3}.$$

. . . .

4241. *Proposé par Margarita Maksakova.*

À l'aide des nombres $1, 2, \ldots, 11$ et un certain nombre réel r, étiqueter les arêtes d'un cube de façon à ce que la somme des étiquettes des arêtes incidentes à un sommet soit la même, quel que soit le sommet. Quelle est la plus petite valeur possible pour r?

4242. *Proposé par Mihály Bencze.*

Soit $x_1 = 4$ et $x_{n+1} = [\sqrt[3]{2}x_n]$ pour $n \geq 1$, où $[\cdot]$ dénote la partie entière d'un nombre réel. Déterminer la plus grande valeur positive $n \in \mathbb{N}$ pour laquelle x_n, x_{n+1}, x_{n+2} forme une progression arithmétique.

4243. *Proposé par Dan Stefan Marinescu, Leonard Giugiuc et Hung Nguyen Viet.*

Soit ABC un triangle. Soient I, r et R le centre du cercle inscrit, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit de ABC, respectivement. Soit D le point d'intersection de la ligne AI et le cercle circonscrit de ABC. De façon similaire, définir les points E et F. Démontrer que

$$AD \cdot BE \cdot CF \geq 16rR^2.$$

4244. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit ABC un triangle sans angle rectangle et soit H son orthocentre. La parallèle à BC passant par H intersecte AB et AC en E et F, et les perpendiculaires à AB et AC au point A en U et V, respectivement. Soient X et Y les projections orthogonales de A vers BU et CV, respectivement. Démontrer que E, F, X et Y sont cocycliques.

4245. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit ABC un triangle aigu avec cercle circonscrit Γ et soit t sa tangente à A. Définissons T et E comme étant les points où le cercle avec centre B et rayon BA intersecte de nouveau t et AC, respectivement, puis T' et F comme étant les points où le cercle avec centre C et rayon CA intersecte de nouveau t et AB, respectivement. Si X est le point d'intersection de TE et $T'F$, et Y est le second point d'intersection de la ligne AX et Γ, démontrer que BC est la bissectrice orthogonale du segment XY.

4246. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Déterminer la meilleure borne inférieure pour $abc + abd + acd + bcd$ par rapport aux valeurs positives a, b, c et d satisfaisant

$$a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

4247. *Proposé par Missouri State University Problem Solving Group.*

Soient B et C deux points sur un cercle centré à O, mais non diamétraux. Soit A un point variable sur le cercle, distinct de B et C et n'appartenant pas à la bissectrice orthogonale de BC. Soient M et N les mi points des segments BC et AO, respectivement. La ligne AM intersecte de nouveau le cercle en D; enfin, NM

et OD intersectent en P. Déterminer le lieu géométrique des points P lorsque A se déplace sur le cercle.

4248. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit n un entier positif et soit $p(x) = 1 + p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_n(x)$, où les polynômes $p_k(x)$ sont définis par $p_0(x) = 2,\ p_1(x) = x^2 + 2$ et la récursion

$$p_{k+1}(x) = (x^2 + 2)p_k(x) - p_{k-1}(x)$$

pour $k \in \mathbb{N}$. Déterminer les racines complexes de $p(x)$.

4249. *Proposé par Daniel Sitaru.*

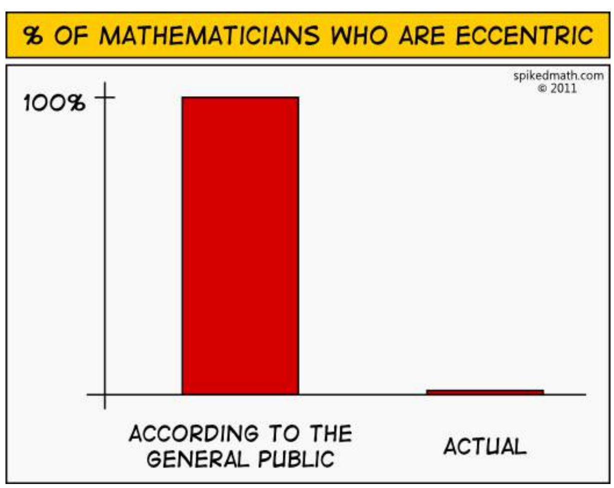
Soient a, b et c des nombres réels, dont au plus un seul est égal à zéro. Démontrer que

$$\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \leq 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

4250. *Proposé par Michael Rozenberg et Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle aigu tel que $\sin A = \sin B \sin C$. Démontrer que

$$\tan A \tan B \tan C \geq \frac{16}{3}.$$



PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **1er février 2018**.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

4251. *Proposé par Paolo Perfetti.*

Soit $8x = y^2$, $z = 0$ l'équation d'une parabole dans le plan (x, y) de $\mathbb{R}^3$. Soit C le cône formé par le sommet $P = (0, 0, 4)$ et les segments allant de P aux points de la parabole. Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$.

a) Calculer la surface de la portion de C se trouvant à l'intérieur de S.

b) Calculer la surface de la portion de S se trouvant à l'intérieur de C.

4252. *Proposé par Leonard Giugiuc et Marian Cucoanes.*

Soit $ABCD$ un tétraèdre avec $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAB = 60°$. Dénoter par R_a, R_b et R_c les rayons des cercles circonscrits des triangles BAC, CAD et DAB, respectivement. Démontrer que

$$R_a + R_b + R_c \geq \sqrt{AB^2 + AC^2 + BC^2}.$$

4253. *Proposé par Titu Zvonaru.*

Soit ABC un triangle tel que $A = 90°$ et $45° < C < 60°$. Soit M le mi point de BC. La perpendiculaire de C vers AM intersecte AB en D. Sur AC, choisissons un point E et soit K l'intersection des lignes CD et BE. Si $BK = 2AE$, démontrer que le triangle CEK est isocèle.

4254. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit ABC un triangle. Démontrer que

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sum_{\text{cyc}}\frac{(\sin A + \sin B)^2}{\sin C} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

4255. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC$ et soit P un point sur son cercle circonscrit tel que $P \neq A$. La réflexion par rapport à AP du cercle avec diamètre

AB intersecte le cercle avec diamètre AP en A et Q. Démontrer que AQ et QC sont perpendiculaires.

4256. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a + b + c = 1$. Démontrer que

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} + \frac{e^c - e^b}{c - b} + \frac{e^a - e^c}{a - c} > 4.$$

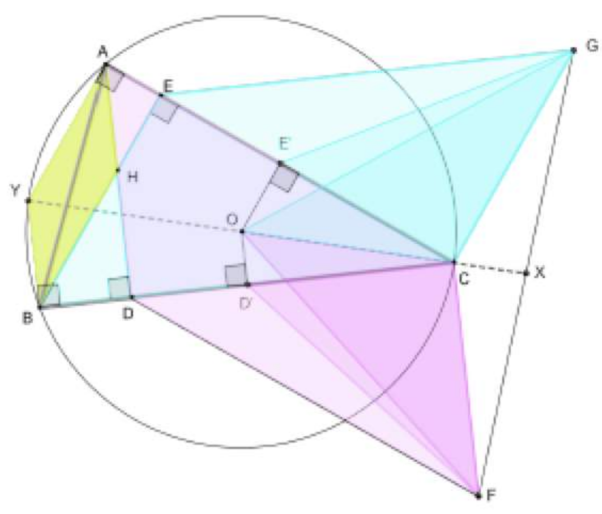
4257. *Proposé par Leonard Giugiuc et Dan Stefan Marinescu.*

Calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n(n+1)]{1! \cdot 2! \cdot \ldots n!}}{\sqrt{n}} \right).$$

4258. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit ABC un triangle aigu avec cercle circonscrit O et orthocentre H, où $D \in BC, AD \perp BC, E \in AC$ puis $BE \perp AC$. Définissons F et G comme étant les quatrièmes sommets des parallélogrammes $CADF$ et $CBEG$. Si X est le mi point de FG et Y est le point où XC intersecte de nouveau le cercle circonscrit, démontrer que $AHBY$ est un parallélogramme.



4259. *Proposé par Mihály Bencze.*

Démontrer que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{2p-1}}{\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}} \right) \geq \frac{n+1}{2^n}.$$

4260. *Proposé par Leonard Giugiuc et Diana Trailescu.*

Soient $a_i, i = 1, \ldots, 6$ des nombres positifs tels que $a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 - a_6 = 3$ et $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 9$. Démontrer que $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \leq 1$.

. . . .

4251. *Proposed by Paolo Perfetti.*

Let $8x = y^2$ and $z = 0$ be the equations of a parabola in the (x, y) plane of $\mathbb{R}^3$. Let C be the cone of vertex in $P = (0, 0, 4)$ and generate the segments from P to the points of the parabola. Let S be the sphere of equation $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$.

a) Calculate the area of that portion of C inside S.

b) Calculate the area of that portion of S inside C.

4252. *Proposed by Leonard Giugiuc and Marian Cucoanes.*

Let $ABCD$ be a tetrahedron with $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAB = 60°$. Denote by R_a, R_b, R_c the circumradii of the triangles BAC, CAD and DAB, respectively. Prove that

$$R_a + R_b + R_c \geq \sqrt{AB^2 + AC^2 + BC^2}.$$

4253. *Proposed by Titu Zvonaru.*

Let ABC be a triangle with $A = 90°$ and $45° < C < 60°$. Let M be the midpoint of BC. The perpendicular from C to AM intersects the leg AB at D. On the side AC we take a point E and let K be the intersection of the lines CD and BE. If $BK = 2AE$, then prove that the triangle CEK is isosceles.

4254. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let ABC be a triangle. Prove that

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sum_{\text{cyc}}\frac{(\sin A + \sin B)^2}{\sin C} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

4255. *Proposed by Michel Bataille.*

Let ABC be an isosceles triangle with $AB = AC$ and P a point of its circumcircle (with $P \neq A$). The reflection about AP of the circle with diameter AB intersects the circle with diameter AP at A and Q. Prove that AQ and QC are perpendicular.

4256. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Let $a, b, c \in \mathbb{R}$ such that $a + b + c = 1$. Prove that

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} + \frac{e^c - e^b}{c - b} + \frac{e^a - e^c}{a - c} > 4.$$

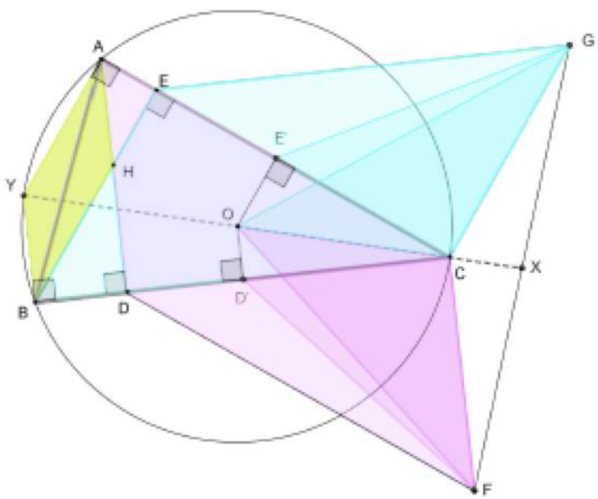
4257. *Proposed by Leonard Giugiuc and Dan Stefan Marinescu.*

Calculate the following limit

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n(n+1)]{1!\cdot 2!\cdot\ldots n!}}{\sqrt{n}}\right).$$

4258. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let ABC be an acute triangle with circumcircle O, orthocentre H, $D\in BC, AD\perp BC, E\in AC, BE\perp AC$. Define points F and G to be the fourth vertices of parallelograms $CADF$ and $CBEG$. If X is the midpoint of FG, and Y is the point where XC intersects the circumcircle again, prove that $AHBY$ is a parallelogram.



4259. *Proposed by Mihály Bencze.*

Prove that

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{2p-1}}{\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}}\right)\geq\frac{n+1}{2^n}.$$

4260. *Proposed by Leonard Giugiuc and Diana Trailescu.*

Let $a_i, i=1,\ldots,6$ be positive numbers such that $a_1+a_2+a_3-a_4-a_5-a_6=3$ and $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2=9$. Prove that $a_1a_2a_3a_4a_5a_6\leq 1$.

PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **March 1, 2018**.

The editor thanks Rolland Gaudet, retired professor of Université de Saint-Boniface in Winnipeg, for translations of the problems.

An asterisk ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

4261. *Proposed by Margarita Maksakova.*

Consider the chess board. A baron can move only on the black squares and in one move he can go from one black square to any of the diagonally adjacent black squares. What is the smallest number of moves he needs to go to every black square?

4262. *Proposed by Prithwijit De.*

Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive integers and suppose $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S$. Find the smallest positive value of c such that the equation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k x^k}{1+x^{2k}} = c$$

has a unique real solution.

4263. *Proposed by Michel Bataille.*

Let ABC be a triangle. Let Γ, with centre O and radius R, be the circumcircle of ABC and γ, with centre $I \neq O$ and radius r, be the incircle of ABC. Let D, E, F be the orthogonal projections of the inverse of I in Γ onto BC, CA, AB, respectively. Express the circumradius of ΔDEF as a function of R and r.

4264. *Proposed by Dorin Marghidanu and Leonard Giugiuc.*

Let (a_n) and (b_n) be two sequences such that $a_0, b_0 > 0$ and

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2b_n} \quad \text{and} \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2a_n}$$

for all $n \geq 0$. Prove that

$$\max(a_{2017}, b_{2017}) > 44.$$

4265. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Consider real numbers $a, b, c \in (0,1)$ such that $a+b+c=1$. Show that

$$\frac{4}{\pi}(\arctan a + \arctan b + \arctan c) > \frac{1}{2-(ab+bc+ca)}.$$

4266. *Proposed by Marius Stănean.*

Let ABC be a triangle with orthocenter H. Let HM be the median and HS be the symmedian in triangle BHC. Denote by P the orthogonal projection of A onto HS. Prove that the circumcircle of triangle MPS is tangent to the circumcircle of triangle ABC.

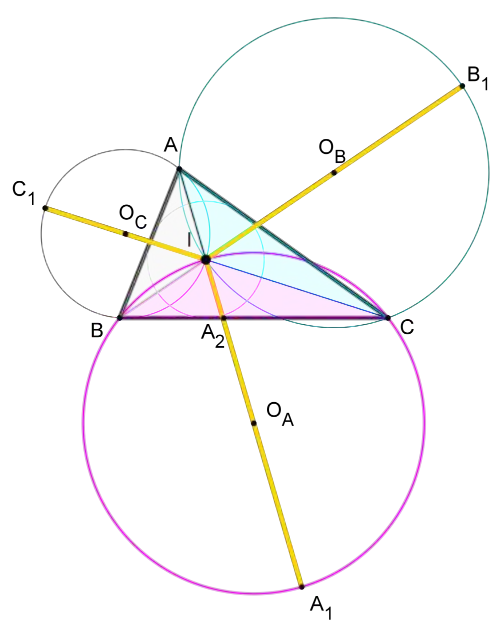
4267. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let a, b, c and d be real numbers such that $0 < a, b, c \leq 1$ and $abcd = 1$. Prove that

$$5(a+b+c+d) + \frac{4}{abc+abd+acd+bcd} \geq 21.$$

4268. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let I be the incenter of the acute triangle ABC, and let the triangle's internal angle bisectors intersect the circles IBC, ICA, and IAB again at A_1, B_1, and C_1, respectively. Show that $\overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{IB_1} + \overrightarrow{IC_1} = \overrightarrow{0}$ if and only if $\triangle\, ABC$ is equilateral.



4269. *Proposed by Hung Nguyen Viet.*

Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be real numbers such that

$$\sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \cdots + \sin x_n \cos x_1 = \frac{n}{2}.$$

Prove that
$$\cos 2x_1 + \cos 2x_2 + \cdots + \cos 2x_n = 0.$$

4270. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let k and t be real numbers with $k \in (0,1)$ and $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Prove that

$$\int_0^t \frac{\cos x}{x^k} dx \geq \int_0^t \frac{\sin x}{x^k} dx.$$

. . . .

4261. *Proposé par Margarita Maksakova.*

Soit un échiquier. Bernadette y déplace un jeton, allant d'un carré noir à un de ses carrés noirs diagonalement adjacents. Quel est le plus petit nombre de tels déplacements qui permettra de visiter tous les carrés noirs?

4262. *Proposé par Prithwijit De.*

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers positifs tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S$. Déterminer la plus petite valeur positive de c telle que l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k x^k}{1 + x^{2k}} = c$$

possède une solution réelle unique.

4263. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit ABC un triangle avec cercle circonscrit Γ de centre O et rayon R, puis cercle inscrit γ de centre $I \neq O$ et rayon r. Soient D, E et F les projections orthogonales de l'inverse de I dans Γ vers BC, CA et AB respectivement. Exprimer le rayon du cercle circonscrit de ΔDEF en termes de R et r.

4264. *Proposé par Dorin Marghidanu et Leonard Giugiuc.*

Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que $a_0, b_0 > 0$ puis

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2a_n}$$

pour tout $n \geq 0$. Démontrer que

$$\max(a_{2017}, b_{2017}) > 44.$$

4265. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Soient des nombres réels $a, b, c \in (0,1)$ tels que $a+b+c=1$. Démontrer que

$$\frac{4}{\pi}(\arctan a + \arctan b + \arctan c) > \frac{1}{2-(ab+bc+ca)}.$$

4266. *Proposé par Marius Stănean.*

Soit ABC un triangle avec orthocentre H. Soient HM la médiane et HS la symédiane dans le triangle BHC. Dénoter par P la projection orthogonale de A vers HS. Démontrer que le cercle circonscrit du triangle MPS est tangent au cercle circonscrit du triangle ABC.

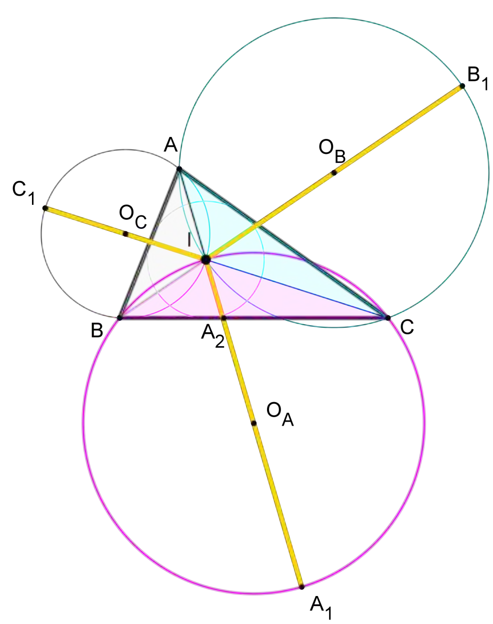
4267. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soient a, b, c et d des nombres réels tels que $0 < a, b, c \leq 1$ and $abcd = 1$. Démontrer que

$$5(a+b+c+d) + \frac{4}{abc+abd+acd+bcd} \geq 21.$$

4268. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit I le centre du cercle inscrit du triangle aigu ABC et supposer que ses bissectrices internes d'angles intersectent les cercles IBC, ICA et IAB une seconde fois en A_1, B_1 et C_1 respectivement. Démontrer que $\overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{IB_1} + \overrightarrow{IC_1} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\triangle\, ABC$ est équilatéral.



4269. *Proposé par Hung Nguyen Viet.*

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que

$$\sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \cdots + \sin x_n \cos x_1 = \frac{n}{2}.$$

Démontrer que

$$\cos 2x_1 + \cos 2x_2 + \cdots + \cos 2x_n = 0.$$

4270. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soient k et t des nombres réels tels que $k \in (0, 1)$ et $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Démontrer que

$$\int_0^t \frac{\cos x}{x^k} dx \geq \int_0^t \frac{\sin x}{x^k} dx.$$

Math Quotes

I wanted certainty in the kind of way in which people want religious faith. I thought that certainty is more likely to be found in mathematics than elsewhere. But I discovered that many mathematical demonstrations, which my teachers expected me to accept, were full of fallacies, and that, if certainty were indeed discoverable in mathematics, it would be in a new field of mathematics, with more solid foundations than those that had hitherto been thought secure. But as the work proceeded, I was continually reminded of the fable about the elephant and the tortoise. having constructed an elephant upon which the mathematical world could rest, I found the elephant tottering, and proceeded to construct a tortoise to keep the elephant from falling. But the tortoise was no more secure than the elephant, and after some twenty years of very arduous toil, I came to the conclusion that there was nothing more that I could do in the way of making mathematical knowledge indubitable.

Bertrand Russell in "Portraits from Memory."

PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **1er avril 2018***.*

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

4271. *Proposé par Hung Nguyen Viet, avec variation venant de l'éditeur.*

a) Soient a, b et c des nombres réels non nuls tels que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1.$$

Démontrer que

$$\sqrt{\frac{(b+c)^2}{a^4}+\frac{(c+a)^2}{b^4}+\frac{(a+b)^2}{c^4}}$$

est une fonction rationnelle de a, b et c.

b) (*Ajout suggéré par l'éditeur.*) Démontrer que l'équation

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$$

n'a aucune solution rationnelle ou démontrer le contraire.

4272. *Proposé par Václav Konečný.*

Soit A un point sur le cercle unitaire et soit r un nombre réel tel que $0 < r < \frac{1}{2}$. Soient $\alpha = \angle BAC$ et $\alpha' = \angle B'AC'$, où ABC et $AB'C'$ sont deux triangles isocèles à l'intérieur du cercle unitaire, avec sommet A et dont les rayons de cercles inscrits ont la même valeur r. Déterminer $\sin(\alpha/2) + \sin(\alpha'/2)$.

4273. *Proposé par Ion Nedelcu et Leonard Giugiuc.*

Soit n un entier plus grand ou égal à 3. Démontrer que pour tous nombres réels $a_i \geq 1, i = 1, 2, \ldots, n$ l'inégalité suivante tient

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \leq n^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} |a_i - a_j|.$$

4274. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit P un point à l'intérieur du triangle ABC et soient L, M et N des points à l'intérieur des segments PA, PB et PC respectivement. Définissons α, β, γ par $\overrightarrow{PL} = \alpha\overrightarrow{LA}$, $\overrightarrow{PM} = \beta\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{PN} = \gamma\overrightarrow{NC}$. Supposant qu'au moins un de α, β, γ est différent de 1, construire le centre de masse de A, B et C avec poids α, β, γ, à l'aide d'une règle rectifiée.

4275. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soient a, b et c des nombres réels non négatifs tels que $a + b + c = 3$. Déterminer la meilleure valeur possible de k pour laquelle l'inégalité suivante tient

$$\left(\frac{ab + bc + ca}{3}\right)^k (ab + bc + ca - abc) \leq 2.$$

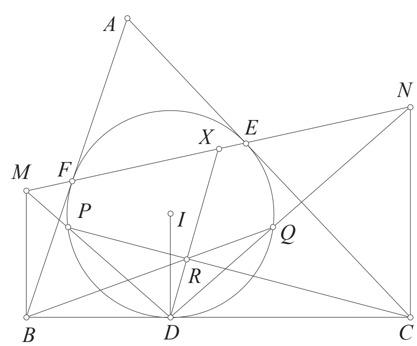
4276. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Soit P un point à l'intérieur du triangle ABC et soient $PA = x, PB = y$ et $PC = z$. Démontrer que

$$27(ax + by - cz)(by + cz - ax)(cz + ax - by) \leq (ax + by + cz)^3.$$

4277. *Proposé par Tran Quang Hung.*

Soit ABC un triangle dont le cercle inscrit (I) touche BC, CA et AB en D, E et F respectivement. De plus, M et N se trouvent sur EF de façon à ce que BM et CN sont perpendiculaires à BC. Aussi, DM et DN intersectent (I) de nouveau en P et Q. Enfin, BQ intersecte CP en R. Démontrer que DR bissecte MN.



4278. *Proposé par Lorian Saceanu.*

Pour x, y et z des nombres réels positifs, démontrer que

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} = \sqrt{\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz}} + \frac{2(x+y+z)}{\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)}}.$$

4279. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle aigu. Démontrer que

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 4\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\cot A} + \frac{1}{\sqrt{3}+\cot B} + \frac{1}{\sqrt{3}+\cot C}\right).$$

4280. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Déterminer les solutions entières de $x^3 + y^3 - 6xy = 2^z - 8$.

. . . .

4271. *Proposed by Hung Nguyen Viet, supplemented by the Editorial Board.*

a) Let a, b, c be nonzero real numbers such that

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1.$$

Prove that

$$\sqrt{\frac{(b+c)^2}{a^4} + \frac{(c+a)^2}{b^4} + \frac{(a+b)^2}{c^4}}$$

is a rational function of a, b, c.

b) (*Suggested by the Editorial Board*). Prove or disprove that the equation

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$$

has no rational solution.

4272. *Proposed by Vaćlav Konečný.*

Let A be a fixed point on the unit circle and let r be a real number such that $0 < r < \frac{1}{2}$. Let $\alpha = \angle BAC$ and $\alpha' = \angle B'AC'$, where ABC and $AB'C'$ are two isosceles triangles with apex A and inradius r that are inscribed in the unit circle. Find $\sin(\alpha/2) + \sin(\alpha'/2)$.

4273. *Proposed by Ion Nedelcu and Leonard Giugiuc.*

Let n be an integer greater than or equal to 3. Prove that for any real numbers $a_i \geq 1, i = 1, 2, \ldots, n$ we have

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \leq n^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} |a_i - a_j|.$$

4274. *Proposed by Michel Bataille.*

Let P be a point interior to a triangle ABC and L, M, N be points interior to the line segments PA, PB, PC, respectively. Define α, β, γ by $\overrightarrow{PL} = \alpha\overrightarrow{LA}$, $\overrightarrow{PM} = \beta\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{PN} = \gamma\overrightarrow{NC}$. Assuming that at least one of α, β, γ is different from 1, construct with straightedge alone the center of mass of A, B, C with respective masses α, β, γ.

4275. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let a, b and c be nonnegative real numbers such that $a + b + c = 3$. Find the best possible k for which the following inequality holds:

$$\left(\frac{ab + bc + ca}{3}\right)^k (ab + bc + ca - abc) \leq 2.$$

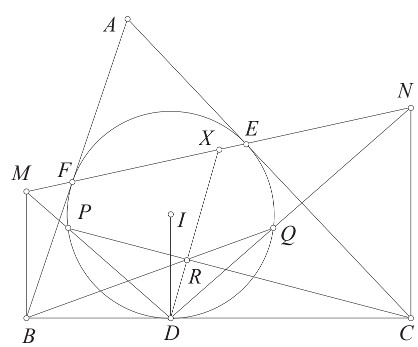
4276. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Let P be a point on the interior of a triangle ABC and let $PA = x, PB = y$ and $PC = z$. Prove that

$$27(ax + by - cz)(by + cz - ax)(cz + ax - by) \leq (ax + by + cz)^3.$$

4277. *Proposed by Tran Quang Hung.*

Let ABC be a triangle with incircle (I) touches BC, CA and AB at D, E and F, respectively. Suppose M and N lie on EF such that BM and CN are perpendicular to BC. Finally, suppose DM and DN intersect (I) again at P and Q, respectively, and that BQ cuts CP at R. Prove that DR bisects MN.



4278. *Proposed by Lorian Saceanu.*

For any positive real numbers x, y and z, show that

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} = \sqrt{\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz}} + \frac{2(x+y+z)}{\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)}}.$$

4279. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let ABC be an acute angled triangle. Show that

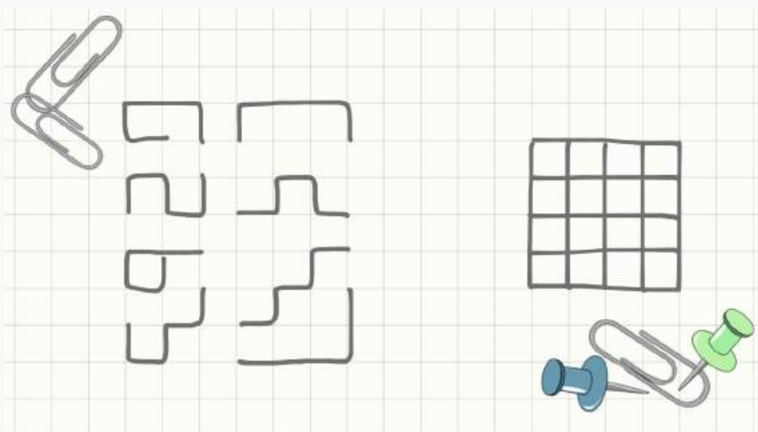
$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 4\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\cot A} + \frac{1}{\sqrt{3}+\cot B} + \frac{1}{\sqrt{3}+\cot C}\right).$$

4280. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Solve the following equation in integers: $x^3 + y^3 - 6xy = 2^z - 8$.

Square lattice

Take eight pieces of wire of length five units each and bend them as follows (you can use regular paper clips):



Your mission, should you choose to accept it, is to put them all together to form a 4×4 square lattice without gaps and overlaps.

Can you do it with five bent pieces of length eight units each?

Puzzle by Nikolai Avilov (first appeared on the 17th All-Russian Olympiad in 1983).

PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **May 1, 2018**.

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

An asterisk ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

4281$\star$. *Proposed by Šefket Arslanagić.*

Prove or disprove the following inequalities :

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)},\quad (a,b,c>0), \tag{1}$$

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1}\geq\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)},\quad (a_i>0, n\geq 3). \tag{2}$$

4282. *Proposed by Michel Bataille.*

Find $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ where the sequence $(u_n)_{n\geq 0}$ is defined by $u_0=1$ and the recursion

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n^2+\frac{u_n}{4^n}}\right)$$

for every nonnegative integer n.

4283. *Proposed by Margarita Maksakova.*

We are given a convex polygon, whose vertices are coloured with three colours so that adjacent vertices get different colours. If all three colours are used in the colouring, prove that you can divide this polygon into triangles using non-intersecting diagonals in such a way that all the resulting triangles have vertices of all three different colours.

4284. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Prove that if a, b and c are real numbers greater than 3 and

$$\log_a 2+\log_b 2+\log_c 2=\log_a\frac{1}{b}+\log_b\frac{1}{c}+\log_c\frac{1}{a},$$

then

$$\log_{a-1}(a^2+b^2)+\log_{b-1}(b^2+c^2)+\log_{c-1}(c^2+a^2)>3.$$

4285. *Proposed by Shafiqur Rahman and Leonard Giugiuc.*

Find the following limit :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n!}-\frac{n}{e}-\frac{\ln n}{2e}\right).$$

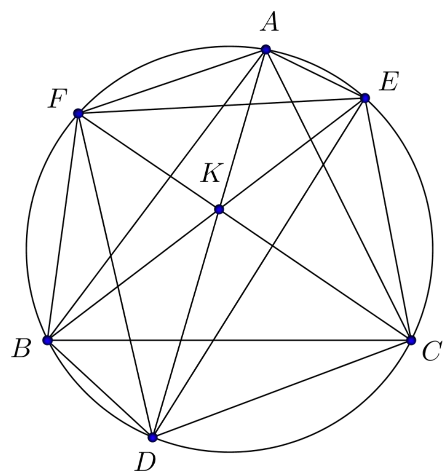
4286. *Proposed by Marian Cucoaneş and Marius Drăgan.*

Let x, y and z be positive real numbers such that $xyz = 1$. Prove that

$$(x^7+y^7+z^7)^2 \geq 3(x^9+y^9+z^9).$$

4287. *Proposed by Van Khea and Leonard Giugiuc.*

Let ABC be a triangle inscribed in a circle O and let K be a point inside ABC. Suppose that AK, BK and CK cut the circle O in points D, E and F, respectively.



Prove that

$$\frac{BD\cdot CE}{BC\cdot DE}+\frac{CE\cdot AF}{CA\cdot EF}+\frac{AF\cdot BD}{AB\cdot FD}=1.$$

4288. *Proposed by Hung Nguyen Viet.*

A sequence $\{a_n\}$ is defined as follows :

$$a_1=1,\quad a_2=2,\quad a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+1}{a_n}$$

for every $n \geq 1$. Let $b_n = a_n a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Prove that for every positive integer n, the number $5b_n^2 - 6b_n + 1$ is a perfect square.

4289. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Prove that in any triangle ABC, we have

$$\sqrt[3]{\frac{r_a}{h_a}}+\sqrt[3]{\frac{r_b}{h_b}}+\sqrt[3]{\frac{r_c}{h_c}}\leq\frac{3R}{2r},$$

where r_a, r_b, r_c are lengths of the exradii, h_a, h_b, h_c are the lengths of the altitudes and R and r are circumradius and inradius, respectively, of the triangle ABC.

4290. *Proposed by Dao Thanh Oai and Leonard Giugiuc.*

Let $A_1A_2A_3A_4A_5$ be a cyclic convex pentagon and let $B_1B_2B_3B_4B_5$ be a regular pentagon, both inscribed in the same circle. Prove that

$$\sum_{1\leq i<j\leq 5} A_iA_j \leq \sum_{1\leq i<j\leq 5} B_iB_j.$$

. . . .

4281★. *Proposé par Šefket Arslanagić.*

Démontrer ou infirmer les inégalités suivantes :

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)},\quad (a,b,c>0), \tag{1}$$

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1}\geq\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)},\quad (a_i>0, n\geq 3). \tag{2}$$

4282. *Proposé par Michel Bataille.*

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ étant définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n^2+\frac{u_n}{4^n}}\right),$$

pour tous entiers non négatifs n.

4283. *Proposé par Margarita Maksakova.*

On considère un polygone dont chaque sommet est colorié d'une de trois couleurs, de manière que les sommets adjacents soient de couleurs différentes. Si les trois couleurs ont été utilisées, démontrer qu'il est possible de diviser le polygone en triangles à l'aide de diagonales qui ne se coupent pas, de manière que chaque triangle ait des sommets de trois couleurs différentes.

4284. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Soit a, b et c des réels supérieurs à 3 tels que

$$\log_a 2 + \log_b 2 + \log_c 2 = \log_a \frac{1}{b} + \log_b \frac{1}{c} + \log_c \frac{1}{a}.$$

Démontrer que

$$\log_{a-1}(a^2+b^2) + \log_{b-1}(b^2+c^2) + \log_{c-1}(c^2+a^2) > 3.$$

4285. *Proposé par Shafiqur Rahman et Leonard Giugiuc.*

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n!} - \frac{n}{e} - \frac{\ln n}{2e} \right).$$

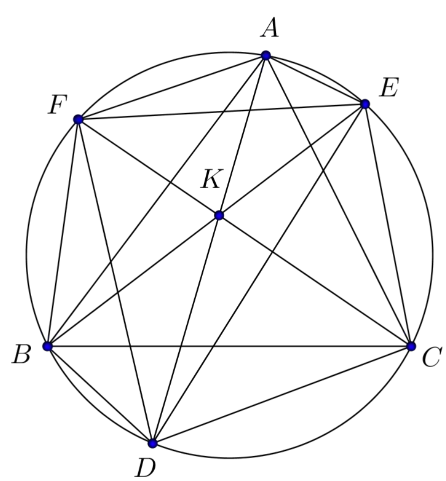
4286. *Proposé par Marian Cucoaneş et Marius Drăgan.*

Soit x, y et z des réels positifs tels que $xyz = 1$. Démontrer que

$$(x^7 + y^7 + z^7)^2 \geq 3(x^9 + y^9 + z^9).$$

4287. *Proposé par Van Khea et Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle et K un point à l'intérieur de ABC. Les demi-droites AK, BK, CK coupent le cercle aux points respectifs D, E et F.



Démontrer que

$$\frac{BD \cdot CE}{BC \cdot DE} + \frac{CE \cdot AF}{CA \cdot EF} + \frac{AF \cdot BD}{AB \cdot FD} = 1.$$

4288. *Proposé par Hung Nguyen Viet.*

Une suite $\{a_n\}$ est définie comme suit :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 1}{a_n}$$

pour tous n ($n \geq 1$). Soit $b_n = a_n a_{n+1}$, pour $n = 1, 2, \ldots$ Démontrer que pour tout entier strictement positif n, le nombre $5b_n^2 - 6b_n + 1$ est un carré parfait.

4289. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Démontrer que pour tout triangle ABC, on a

$$\sqrt[3]{\frac{r_a}{h_a}} + \sqrt[3]{\frac{r_b}{h_b}} + \sqrt[3]{\frac{r_c}{h_c}} \leq \frac{3R}{2r},$$

h_a, h_b et h_c étant les hauteurs du triangle, R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle, r étant le rayon du cercle inscrit dans le triangle et r_a, r_b et r_c étant les rayons des cercles exinscrits.

4290. *Proposé par Dao Thanh Oai et Leonard Giugiuc.*

Soit $A_1A_2A_3A_4A_5$ un pentagone convexe inscriptible et $B_1B_2B_3B_4B_5$ un pentagone régulier, tous deux inscrits dans un même cercle. Démontrer que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 5} A_iA_j \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 5} B_iB_j.$$

PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **1er mai 2018**.

Un astérisque ($\star$) signale un problème proposé sans solution.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

4291. *Proposé par George Stoica.*

i) Déterminer le nombre de permutations de n entiers distincts choisis dans l'ensemble d'entiers $1, 2, \ldots, N$, de façon à ne pas inclure d'entiers consécutifs.

ii) Déterminer le nombre de permutations de $n+1$ entiers distincts choisis dans l'ensemble d'entiers $1, 2, \ldots, N$, de façon à ne pas inclure d'entiers consécutifs parmi les n premiers entiers de la permutation, tout en faisant en sorte que le $(n+1)^e$ entier est consécutif à un des n premiers entiers.

4292. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit ABC un triangle aigu et soient $A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB$ les pieds de ses altitudes. De plus, supposer que X, Y et Z sont les centres des cercles inscrits des triangles $AC_1B_1, BA_1C_1, CB_1A_1$ respectivement. Démontrer que ABC est équilatéral si et seulement si $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{0}$.

4293. *Proposé par Eugen Ionascu.*

Soit ϕ le nombre d'or. Démontrer qu'il existe un nombre infini de suites $0-1$ $(x_n)_{n\geq 1}$ telles que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\phi^n} = 1.$$

4294. *Proposé par Miguel Ochoa Sanchez and Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC$. Soit D un point sur le côté AC tel que $CD = 2DA$ et soit P un point sur BD tel que $PA \perp PC$. Démontrer que

$$\frac{BP}{PD} = \frac{3BC^2}{4AC^2}.$$

4295. *Proposé par Khang Nguyen Thanh.*

Soient a, b et c des nombres réels non nuls et distincts tels que $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = 3$. Déterminer la valeur maximale de

$$P = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

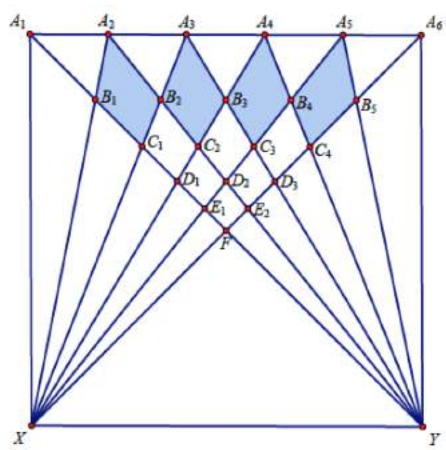
4296. *Proposé par Marius Drăgan.*

Démontrer l'inégalité suivante, valide pour tout triangle ABC:

$$5 \sum_{cyclique} \tan^4 \frac{A}{2} \tan^4 \frac{B}{2} - 4 \sum_{cyclique} \tan^5 \frac{A}{2} \tan^5 \frac{B}{2} \geq \frac{11}{81}.$$

4297. *Proposé par Arsalan Wares.*

Le polygone A_1A_6YX est un carré. Son côté A_1A_6 est découpé en cinq parties égales à l'aide des points A_2, A_3, A_4 et A_5. Le point X est relié aux points A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6, et puis le point Y est relié aux points A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5. Les points B_i, C_i, D_i et F sont les points d'intersection de segments, comme indiqué ci-bas.



Déterminer le ratio de la somme des surfaces des quadrilatères ombragés (notamment les quadrilatères $B_1A_2B_2C_1, B_2A_3B_3C_2, B_3A_4B_4C_3$ et $B_4A_5B_5C_4$) par rapport à la surface du carré A_1A_6YX.

4298. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Calculer

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{2 + \sin(n+k) + (n+k)^2}.$$

4299. *Proposé par Michel Bataille.*

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f\left(xy + f(x+y)\right) = f\left(f(xy)\right) + x + y$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

4300$\star$. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soient a, b et c des nombres réels positifs tels que $a + b + c = ab + bc + ca > 0$. Démontrer ou réfuter l'inégalité

$$\sqrt{24ab+25} + \sqrt{24bc+25} + \sqrt{24ca+25} \geq 21.$$

. . . .

4291. *Proposed by George Stoica.*

i) Find the number of permutations of n distinct integers from the set of integers $1, 2, \ldots, N$ so that no two integers in a permutation are consecutive.

ii) Find the number of permutations of $n+1$ distinct integers from the set of integers $1, 2, \ldots, N$ so that no two of the first n integers in a permutation are consecutive, but the $(n+1)^{th}$ is consecutive with one of the first n.

4292. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let ABC be an acute triangle and let $A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB$ be the feet of its altitudes. Suppose further that X, Y, Z are the incenters of triangles AC_1B_1, BA_1C_1 and CB_1A_1, respectively. Show that the given triangle is equilateral if and only if $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{0}$.

4293. *Proposed by Eugen Ionascu.*

Let ϕ be the golden ratio. Prove that there exist infinitely many $0-1$ sequences $(x_n)_{n\geq 1}$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\phi^n} = 1.$$

4294. *Proposed by Miguel Ochoa Sanchez and Leonard Giugiuc.*

Let ABC be an isosceles triangle with $AB = AC$. Let D be a point on the side AC such that $CD = 2DA$. Let P be a point on BD such that $PA \perp PC$. Prove that

$$\frac{BP}{PD} = \frac{3BC^2}{4AC^2}.$$

4295. *Proposed by Khang Nguyen Thanh.*

Let a, b and c be distinct non-zero real numbers such that $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = 3$. Find the maximum value of

$$P = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

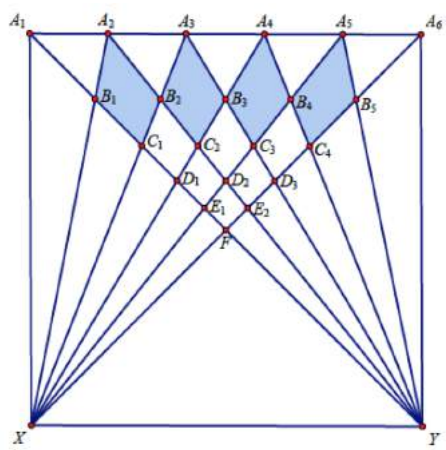
4296. *Proposed by Marius Drăgan.*

Prove that the following inequality holds for every triangle ABC:

$$5 \sum_{cyclic} \tan^4 \frac{A}{2} \tan^4 \frac{B}{2} - 4 \sum_{cyclic} \tan^5 \frac{A}{2} \tan^5 \frac{B}{2} \geq \frac{11}{81}.$$

4297. *Proposed by Arsalan Wares.*

Suppose polygon A_1A_6YX is a square. Points A_2, A_3, A_4 and A_5 divide side A_1A_6 into five equal parts. Point X is connected to points A_2, A_3, A_4, A_5 and A_6, and point Y is connected to points A_1, A_2, A_3, A_4 and A_5. Points B_i, C_i, D_i, E_i and F are points of intersections of line segments shown in the figure.



Find the ratio of the sum of the areas of the shaded quadrilaterals (namely, quadrilaterals $B_1A_2B_2C_1, B_2A_3B_3C_2, B_3A_4B_4C_3$ and $B_4A_5B_5C_4$) to the area of square A_1A_6YX.

4298. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Compute:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{2 + \sin(n+k) + (n+k)^2}.$$

4299. *Proposed by Michel Bataille.*

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f\left(xy + f(x+y)\right) = f\left(f(xy)\right) + x + y$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

4300$\star$. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let a, b and c be positive real numbers with $a + b + c = ab + bc + ca > 0$. Prove or disprove that

$$\sqrt{24ab + 25} + \sqrt{24bc + 25} + \sqrt{24ca + 25} \geq 21.$$

Math Quotes

It is not knowledge, but the act of learning, not possession but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment. When I have clarified and exhausted a subject, then I turn away from it, in order to go into darkness again; the never-satisfied man is so strange when he has completed a structure, then it is not in order to dwell in it peacefully, but in order to begin another. I imagine the world conqueror must feel thus, who, after one kingdom is scarcely conquered, stretches out his arms for others.

Karl Friedrich Gauss in a letter to Bolyai, 1808.