PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **March 1, 2016**, *although late solutions will also be considered until a solution is published.*

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

4001. *Proposed by Cristinel Mortici and Leonard Giugiuc.*

Let $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ with $d > 2$ such that

$$(2d+1)\cdot\frac{a}{6}+\frac{b}{2}+\frac{c}{d+1}=0.$$

Prove that there exists $t \in (0, d)$ such that $at^2 + bt + c = 0$.

4002. *Proposed by Henry Aniobi.*

Let f be a convex function on an interval I. Let $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ and $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$ be numbers such that $x_i + y_j$ is always in I for all $1 \le i, j \le n$. Let $z_1, z_2, \ldots, z_n$ be an arbitrary permutation of $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Show that

$$\begin{aligned} f(x_1+y_1)+\ldots+f(x_n+y_n) &\ge f(x_1+z_1)+\ldots+f(x_n+z_n) \\ &\ge f(x_1+y_n)+f(x_2+y_{n-1})+\ldots+f(x_n+y_1); \end{aligned}$$

4003. *Proposed by Martin Lukarevski.*

Show that for any triangle ABC, the following inequality holds

$$\begin{aligned} \sin A\sin B\sin C\left(\frac{1}{\sin A+\sin B}+\frac{1}{\sin B+\sin C}+\frac{1}{\sin C+\sin A}\right) \\ \le \frac{3}{4}(\cos A+\cos B+\cos C). \end{aligned}$$

4004. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let x, y, z be positive real numbers such that $x + y + z = 2$. Prove that

$$\frac{x^5}{yz(x^2+y^2)}+\frac{y^5}{zx(y^2+z^2)}+\frac{z^5}{xy(z^2+x^2)}\ge 1.$$

4005. *Proposed by Michel Bataille.*

Let a, b, c be the sides of a triangle with area F. Suppose that some positive real numbers x, y, z satisfy the equations

$$x + y + z = 4 \quad \text{and}$$

$$2xb^2c^2 + 2yc^2a^2 + 2za^2b^2 - \left(\frac{4 - yz}{x}\,a^4 + \frac{4 - zx}{y}\,b^4 + \frac{4 - xy}{z}\,c^4\right) = 16F^2.$$

Show that the triangle is acute and find x, y, z.

4006. *Proposed by Dragolijub Milošević.*

Let x, y, z be positive real numbers such that $xyz = 1$. Prove that

$$\frac{2}{xy + yz + zx} - \frac{1}{x + y + z} \leq \frac{1}{3}.$$

4007. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Show that for any numbers $a, b, c > 0$ such that $a^2 + b^2 + c^2 = 12$, we have

$$(a^3 + 4a + 8)(b^3 + 4b + 8)(c^3 + 4c + 8) \leq 24^3.$$

4008. *Proposed by Mehmet Şahin.*

Let ABC be a triangle with $\angle ACB = 2\alpha$, $\angle ABC = 3\alpha$, AD is an altitude and AE is a median such that $\angle DAE = \alpha$. If $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$, prove that

$$\frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1}.$$

4009. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let m_a, m_b, m_c be the lengths of the medians of a triangle ABC. Prove that

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \leq \frac{R}{2r^2},$$

where r and R are inradius and circumradius of ABC, respectively.

4010. *Proposed by Ovidiu Furdui.*

Let $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Calculate

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)^{2n} f(x)\mathrm{d}x.$$

. . . .

4001. *Proposé par Cristinel Mortici et Leonard Giugiuc.*

Soit a, b, c et d des réels, avec $d > 2$, tels que

$$(2d+1) \cdot \frac{a}{6} + \frac{b}{2} + \frac{c}{d+1} = 0.$$

Démontrer qu'il existe un nombre t, $t \in (0, d)$, tel que $at^2 + bt + c = 0$.

4002. *Proposé par Henry Aniobi.*

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des nombres tels que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ et $x_i + y_j$ est toujours sur I pour tous i et j avec $1 \leq i, j \leq n$. Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ une permutation quelconque de $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Démontrer que

$$\begin{aligned} f(x_1+y_1) + \cdots + f(x_n+y_n) &\geq f(x_1+z_1) + \cdots + f(x_n+z_n) \\ &\geq f(x_1+y_n) + f(x_2+y_{n-1}) + \cdots + f(x_n+y_1) \end{aligned}$$

et que les inégalités sont renversées lorsque f est concave.

4003. *Proposé par Martin Lukarevski.*

Démontrer que pour n'importe quel triangle ABC, on a toujours

$$\begin{aligned} \sin A \sin B \sin C &\left(\frac{1}{\sin A + \sin B} + \frac{1}{\sin B + \sin C} + \frac{1}{\sin C + \sin A} \right) \\ &\leq \frac{3}{4}(\cos A + \cos B + \cos C). \end{aligned}$$

4004. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit x, y, z des réels strictement positifs tels que $x + y + z = 2$. Démontrer que

$$\frac{x^5}{yz(x^2+y^2)} + \frac{y^5}{zx(y^2+z^2)} + \frac{z^5}{xy(z^2+x^2)} \geq 1.$$

4005. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle et F l'aire du triangle. Soit x, y, z des réels strictement positifs qui vérifient les équations

$$x + y + z = 4 \quad \text{et}$$

$$2xb^2c^2 + 2yc^2a^2 + 2za^2b^2 - \left(\frac{4-yz}{x}\, a^4 + \frac{4-zx}{y}\, b^4 + \frac{4-xy}{z}\, c^4 \right) = 16F^2.$$

Démontrer que le triangle est acutangle et déterminer x, y, z.

4006. *Proposé par Dragolijub Milošević.*

Soit x, y, z des réels positifs tels que $xyz = 1$. Démontrer que

$$\frac{2}{xy+yz+zx} - \frac{1}{x+y+z} \leq \frac{1}{3}.$$

4007. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit a, b, c des réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Démontrer que

$$(a^3 + 4a + 8)(b^3 + 4b + 8)(c^3 + 4c + 8) \leq 24^3.$$

4008. *Proposé par Mehmet Şahin.*

Soit ABC un triangle avec $\angle ACB = 2\alpha$ et $\angle ABC = 3\alpha$. La hauteur AD et la médiane AE sont telles que $\angle DAE = \alpha$. Sachant que $|BC| = a, |CA| = b$ et $|AB| = c$, démontrer que

$$\frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1}.$$

4009. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit m_a, m_b, m_c les longueurs des médianes d'un triangle ABC. Démontrer que

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{R}{2r^2},$$

r étant le rayon du cercle inscrit dans le triangle et R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle.

4010. *Proposé par Ovidiu Furdui.*

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)^{2n} f(x)\mathrm{d}x.$$

PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1 avril 2016** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

3960. *Proposé par George Apostolopoulos. Correction.*

Soient a, b, c des nombres réels non négatifs tels que $a+b+c=4$. Démontrer que

$$\frac{a^2b}{3a^2+b^2+4ac}+\frac{b^2c}{3b^2+c^2+4ab}+\frac{c^2a}{3c^2+a^2+4bc}\leqslant\frac{1}{2}.$$

4011. *Proposé par Abdilkadir Altinas.*

Dans un triangle non équilatéral ABC, soient H l'orthocentre de ABC et J l'orthocentre du triangle orthique DEF de ABC (c'est-à-dire le triangle formé par les altitudes de ABC). Si $\angle BAC = 60^\circ$, montrer que $AJ \perp HJ$.

4012. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$. Considérer des nombres réels a_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ tels que

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{n-1} \geqslant 1 \geqslant a_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = n.$$

Démontrer que

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

4013. *Proposé par Mehmet Şahin.*

Soient a, b et c les côtés du triangle ABC, D le pied de l'altitude émanant de A et E le mi point de BC. Poser $\theta = \angle DAE$ et supposer que $\angle ACB = 2\theta$. Démontrer que les côtés du triangle vérifient

$$(a-b)^2 = 2c^2 - b^2.$$

4014. *Proposé par Mihaela Berinedanu.*

Soit n un nombre naturel et soient x, y et z des nombres réels positifs tels que $x + y + z + nxyz = n + 3$. Démontrer que

$$(1 + \frac{y}{x} + nyz)(1 + \frac{z}{y} + nzx)(1 + \frac{x}{z} + nxy) \geqslant (n + 2)^3.$$

4015. *Proposé par Michel Bataille.*

Déterminer tous les nombres réels a tels que

$$a \cos x + (1 - a) \cos \frac{x}{3} > \frac{\sin x}{x}$$

pour tout x non nul dans l'intervalle $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

4016. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soient x, y et z des nombres réels positifs. Déterminer la valeur maximale de l'expression

$$\frac{x + 2y}{2x + 3y + z} + \frac{y + 2z}{2y + 3z + x} + \frac{z + 2x}{2z + 3x + y}.$$

4017. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit P un point sur le cercle inscrit γ du triangle ABC. Les perpendiculaires vers BC, CA et AB, passant par P, rencontrent γ aux points U, V et W respectivement. Démontrer qu'un des nombres $PU \cdot BC, PV \cdot CA, PW \cdot AB$ est égal à la somme des deux autres.

4018. *Proposé par Ovidiu Furdui.*

Soit

$$I_n = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) \ln(1 - x_1 x_2 \cdots x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

où $n \geqslant 1$ est entier. Démontrer que l'intégrale converge et déterminer sa valeur.

4019. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Un triangle avec longueurs de côtés a, b et c possède un périmètre de longueur 3. Démontrer que

$$a^3 + b^3 + c^3 + a^4 + b^4 + c^4 \geqslant 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

4020. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Soit ABC un triangle. Supposer que les bissectrices internes de A, B et C intersectent les côtés BC, CA et AB en D, E et F respectivement. Le cercle inscrit de ΔABC touche les côtés BC, CA et AB en M, N et P respectivement. Démontrer que $[MNP] \leqslant [DEF]$, où $[\cdot]$ dénote la surface du triangle en question.

. . . .

3960. *Proposed by George Apostolopoulos. Correction.*

Let a, b, c be nonnegative real numbers such that $a + b + c = 4$. Prove that

$$\frac{a^2b}{3a^2+b^2+4ac} + \frac{b^2c}{3b^2+c^2+4ab} + \frac{c^2a}{3c^2+a^2+4bc} \leqslant \frac{1}{2}.$$

4011. *Proposed by Abdilkadir Altinas.*

In non-equilateral triangle ABC, let H be the orthocenter of ABC and J be the orthocenter of the orthic triangle DEF of ABC (that is the triangle formed by the feet of the altitudes of ABC). If $\angle BAC = 60^\circ$, show that $AJ \perp HJ$.

4012. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let n be an integer with $n \geqslant 3$. Consider real numbers a_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ such that

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{n-1} \geqslant 1 \geqslant a_n \geqslant 0 \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = n.$$

Prove that

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

4013. *Proposed by Mehmet Şahin.*

Let a, b, c be the sides of triangle ABC, D be the foot of the altitude from A and E be the midpoint of BC. Define $\theta = \angle DAE$ and suppose that $\angle ACB = 2\theta$. Prove that the sides of the triangle satisfy

$$(a-b)^2 = 2c^2 - b^2.$$

4014. *Proposed by Mihaela Berinedanu.*

Let n be a natural number and let x, y and z be positive real numbers such that $x + y + z + nxyz = n + 3$. Prove that

$$(1 + \frac{y}{x} + nyz)(1 + \frac{z}{y} + nzx)(1 + \frac{x}{z} + nxy) \geqslant (n+2)^3$$

and determine when equality holds.

4015. *Proposed by Michel Bataille.*

Find all real numbers a such that

$$a\cos x + (1-a)\cos\frac{x}{3} > \frac{\sin x}{x}$$

for every nonzero x of the interval $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

4016. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let x, y, z be positive real numbers. Find the maximal value of the expression

$$\frac{x+2y}{2x+3y+z} + \frac{y+2z}{2y+3z+x} + \frac{z+2x}{2z+3x+y}.$$

4017. *Proposed by Michel Bataille.*

Let P be a point of the incircle γ of a triangle ABC. The perpendiculars to BC, CA and AB through P meet γ again at U, V and W, respectively. Prove that one of the numbers $PU \cdot BC, PV \cdot CA, PW \cdot AB$ is the sum of the other two.

4018. *Proposed by Ovidiu Furdui.*

Let

$$I_n = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \ln(x_1x_2\cdots x_n)\ln(1-x_1x_2\cdots x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n,$$

where $n \geqslant 1$ is an integer. Prove that this integral converges and find its value.

4019. *Proposed by George Apostolopoulos.*

A triangle with side lengths a, b, c has perimeter 3. Prove that

$$a^3 + b^3 + c^3 + a^4 + b^4 + c^4 \geqslant 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

4020. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Let ABC be a triangle and let the internal bisectors from A, B and C intersect the sides BC, CA and AB in D, E and F, respectively. The incircle of ΔABC touches the sides BC, CA and AB in M, N, and P, respectively. Prove that $[MNP] \leqslant [DEF]$, where $[\cdot]$ denotes the area of the specified triangle.

PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **May 1, 2016**, *although late solutions will also be considered until a solution is published.*

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

An asterisk ($\star$) after a number indicates that a problem was proposed without a solution.

4021. *Proposed by Arkady Alt.*

Let $(\overline{\mathbf{a}}_n)_{n\geq 0}$ be a sequence of Fibonacci vectors defined recursively by $\overline{\mathbf{a}}_0 = \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}_1 = \overline{\mathbf{b}}$ and $\overline{\mathbf{a}}_{n+1} = \overline{\mathbf{a}}_n + \overline{\mathbf{a}}_{n-1}$ for all integers $n \geq 1$. Prove that, for all integers $n \geq 1$, the sum of vectors $\overline{\mathbf{a}}_0 + \overline{\mathbf{a}}_1 + \cdots + \overline{\mathbf{a}}_{4n+1}$ equals $k\overline{\mathbf{a}}_i$ for some i and constant k.

4022. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

In a triangle ABC, let internal angle bisectors from angles A, B and C intersect the sides BC, CA and AB in points D, E and F and let the incircle of ΔABC touch the sides in M, N, and P, respectively. Show that

$$\frac{PA}{PB} + \frac{MB}{MC} + \frac{NC}{NA} \geq \frac{FA}{FB} + \frac{DB}{DC} + \frac{EC}{EA}.$$

4023. *Proposed by Ali Behrouz.*

Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}$ with $x > y$, we have

$$f\left(\frac{x}{x-y}\right) + f(xf(y)) = f(xf(x)).$$

4024. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let a, b, c and d be real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Prove that

$$abc + abd + acd + bcd + 4 \geq a + b + c + d$$

and determine when equality holds.

4025. *Proposed by Dragoljub Miloşević.*

Prove that for positive numbers a, b and c, we have

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{2b+c}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2c+a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{c}{2a+b}\right)^2} \geq \sqrt[3]{3}.$$

4026. *Proposed by Roy Barbara.*

Prove or disprove the following property: if r is any non-zero rational number, then the real number $x = (1+r)^{1/3} + (1-r)^{1/3}$ is irrational.

4027. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let a, b and c be positive real numbers such that $a+b+c=3$. Prove that

$$\frac{ab}{a+ab+b} + \frac{bc}{b+bc+c} + \frac{ac}{a+ac+c} \leq 1.$$

4028. *Proposed by Michel Bataille.*

In 3-dimensional Euclidean space, a line ℓ meets orthogonally two distinct parallel planes $\mathcal{P}$ and $\mathcal{P}'$ at H and H'. Let r and r' be positive real numbers with $r \leq r'$; let $\mathcal{C}$ be the circle in $\mathcal{P}$ with center H, radius r, and let $\mathcal{C}'$ in $\mathcal{P}'$ be similarly defined. For a fixed point M' on $\mathcal{C}'$, find the maximum distance between the lines ℓ and MM' as M moves about the circle $\mathcal{C}$ (where the distance between two lines is the minimum distance from a point of one line to a point of the other).

4029. *Proposed by Paul Bracken.*

Suppose $a > 0$. Find the solutions of the following equation in the interval $(0, \infty)$:

$$\frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} = x - a.$$

4030. *Proposed by Paolo Perfetti.*

a) Prove that $4^{\cos t} + 4^{\sin t} \geq 5$ for $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

b) Prove that $6^{\cos t} + 6^{\sin t} \geq 7$ for $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

. . . .

4021. *Proposé par Arkady Alt.*

Soit $(\overline{\mathbf{a}}_n)_{n\geq 0}$ une suite de vecteurs définie de façon récursive à la manière de Fibonacci : $\overline{\mathbf{a}}_0 = \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}_1 = \overline{\mathbf{b}}$ et $\overline{\mathbf{a}}_{n+1} = \overline{\mathbf{a}}_n + \overline{\mathbf{a}}_{n-1}$. Démontrer que la somme $\overline{\mathbf{a}}_0 + \overline{\mathbf{a}}_1 + \cdot + \overline{\mathbf{a}}_{4n+1}$ est égale à $k\overline{\mathbf{a}}_i$ pour un i quelconque et une constante k.

4022. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Dans un triangle ABC, les bissectrices internes des angles A, B et C coupent les côtés BC, CA et AB aux points respectifs D, E et F. De plus, le cercle inscrit dans

le triangle touche ces mêmes côtés aux points respectifs M, N et P. Démontrer que
$$\frac{PA}{PB}+\frac{MB}{MC}+\frac{NC}{NA}\geq\frac{FA}{FB}+\frac{DB}{DC}+\frac{EC}{EA}.$$

4023. *Proposé par Ali Behrouz.*

Déterminer toutes les fonctions f ($f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}^+$) pour lesquelles
$$f\left(\frac{x}{x-y}\right)+f(xf(y))=f(xf(x))$$
pour tous réels x et y ($x>y$).

4024. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soit a, b, c et d des réels tels que $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Démontrer que
$$abc+abd+acd+bcd+4\geq a+b+c+d$$
et déterminer les conditions auxquelles il y a égalité.

4025. *Proposé par Dragoljub Miloşević.*

Soit a, b et c des réels strictement positifs. Démontrer que
$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{2b+c}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2c+a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{c}{2a+b}\right)^2}\geq\sqrt[3]{3}.$$

4026. *Proposé par Roy Barbara.*

Démontrer ou infirmer l'énoncé suivant: Si r est un nombre rationnel non nul, alors le nombre x défini par $x=(1+r)^{1/3}+(1-r)^{1/3}$ est irrationnel.

4027. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit a, b et c des réels strictement positifs tels que $a+b+c=3$. Démontrer que
$$\frac{ab}{a+ab+b}+\frac{bc}{b+bc+c}+\frac{ac}{a+ac+c}\leq 1.$$

4028. *Proposé par Michel Bataille.*

Dans l'espace euclidien à trois dimensions, on considère une droite ℓ orthogonale à deux plans parallèles distincts, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, qui coupe ces plans aux points respectifs H et H'. Soit r et r' des réels strictement positifs tels que $r\leq r'$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle dans $\mathcal{P}$ de centre H et de rayon r. De même, $\mathcal{C}'$ est le cercle dans $\mathcal{P}'$ de centre

H' et de rayon r'. Étant donné un point fixe M' sur $\mathcal{C}'$, déterminer la distance maximale entre les droites ℓ et MM' lorsque M se meut autour du cercle $\mathcal{C}$. (La distance entre deux droites est la distance minimale entre un point d'une droite et un point de l'autre droite.)

4029. *Proposé par Paul Bracken.*

Soit un réel a ($a > 0$). Résoudre l'équation suivante dans l'intervalle $(0, \infty)$:

$$\frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} = x - a$$

4030. *Proposé par Paolo Perfetti.*

a) Démontrer que $4^{\cos t} + 4^{\sin t} \geq 5$, pour tout t dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$.

b) Démontrer que $6^{\cos t} + 6^{\sin t} \geq 7$, pour tout t dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Math Quotes

Numbers written on restaurant bills within the confines of restaurants do not follow the same mathematical laws as numbers written on any other pieces of paper in any other parts of the Universe.

This single statement took the scientific world by storm. It completely revolutionized it. So many mathematical conferences got held in such good restaurants that many of the finest minds of a generation died of obesity and heart failure and the science of math was put back by years.

Douglas Adams, "Life, the Universe and Everything." New York: Harmony Books, 1982.

PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1 juillet 2016** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

Un astérisque ($\star$) *signale un problème proposé sans solution.*

La rédaction souhaite remercier André Ladouceur, Ottawa, ON, d'avoir traduit les problèmes.

4031. *Proposé par D. M. Bătineţu-Giurgiu et Neculai Stanciu.*

Démontrer que

$$\frac{2F_1^4+F_2^4+F_3^4}{F_1^2+F_3^2}+\frac{2F_2^4+F_3^4+F_4^4}{F_2^2+F_4^2}+\cdots+\frac{2F_n^4+F_1^4+F_2^4}{F_n^2+F_2^2}>2F_nF_{n+1},$$

F_n étant le $n^{\text{ième}}$ nombre de Fibonacci ($F_0=0, F_1=1$ et $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$ pour tout $n\geq 0$).

4032. *Proposé par Dan Stefan Marinescu et Leonard Giugiuc.*

Soit un triangle ABC ayant pour longueurs de côtés a, b et c. Soit r le rayon du cercle inscrit dans le triangle et r_a, r_b et r_c les rayons des cercles exinscrits du triangle. Démontrer que

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\geq 2\sqrt{3r(r_a+r_b+r_c)}.$$

4033. *Proposé par Salem Malikic.*

Soit $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n$ des réels strictement positifs et $x_1,\ldots,x_n$ des réels tels que $x_1+\cdots+x_n=1$ et $\alpha_i x_i+\beta_i\geq 0$ pour tout i ($i=1,2,\ldots,n$). Déterminer la valeur maximale de l'expression

$$\sqrt{\alpha_1x_1+\beta_1}+\sqrt{\alpha_2x_2+\beta_2}+\cdots+\sqrt{\alpha_nx_n+\beta_n}.$$

4034. *Proposé par Michel Bataille.*

Évaluer

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16^n}\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{2n+1-k}\binom{2k}{k}\binom{4n-2k}{2n-k}.$$

4035. *Proposé par Daniel Sitaru et Leonard Giugiuc.*

Déterminer toutes les solutions X de l'équation matricielle suivante, X étant une matrice 2×2 de nombres réels :

$$X^3 - 5X^2 + 6X = \begin{pmatrix} 15 & a \\ b & 15 \end{pmatrix}.$$

4036. *Proposé par Arkady Alt.*

Soit a, b et c des réels positifs ou nuls. Démontrer que

$$k(ab+bc+ca)(a+b+c) - (a^2c + b^2a + c^2b) \leq \frac{(3k-1)(a+b+c)^3}{9}$$

pour tout réel $k \geq \frac{11}{24}$.

4037. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit P un point quelconque sur le cercle γ inscrit dans le triangle ABC. Les perpendiculaires à BC, CA et AB, issues du point P, coupent γ de nouveau aux points respectifs U, V et W. Démontrer que l'aire du triangle UVW est indépendante de la position du point P sur γ.

4038. *Proposé par George Apostopoulos.*

Soit x, y et z des réels strictement positifs tels que $x+y+z = xyz$. Déterminer la valeur minimale de l'expression

$$\sqrt{\frac{1}{3}x^4+1} + \sqrt{\frac{1}{3}y^4+1} + \sqrt{\frac{1}{3}z^4+1}.$$

4039. *Proposé par Abdilkadir Altinaş.*

Soit un triangle ABC dans lequel $\angle CAB = 48^\circ$ et $\angle CBA = 12^\circ$ et soit D un point sur AB tel que $CD = 1$ et $AB = \sqrt{3}$. Déterminer $\angle DCB$.

4040. *Proposé par Ali Behrouz.*

Déterminer toutes les fonctions f ($f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$) telles que

$$(f(a)+b)f(a+f(b)) = (a+f(b))^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

. . . .

4031. *Proposed by D. M. Bătineţu-Giurgiu and Neculai Stanciu.*

Prove that

$$\frac{2F_1^4+F_2^4+F_3^4}{F_1^2+F_3^2}+\frac{2F_2^4+F_3^4+F_4^4}{F_2^2+F_4^2}+\cdots+\frac{2F_n^4+F_1^4+F_2^4}{F_n^2+F_2^2}>2F_nF_{n+1},$$

where F_n represents the nth Fibonacci number ($F_0=0, F_1=1$ and $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$ for all $n\geq 0$).

4032. *Proposed by Dan Stefan Marinescu and Leonard Giugiuc.*

Prove that in any triangle ABC with sides a, b and c, inradius r and exradii r_a, r_b, r_c, we have:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\geq 2\sqrt{3r(r_a+r_b+r_c)}.$$

4033. *Proposed by Salem Malikic.*

Let $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n$ be positive real numbers and $x_1,\ldots,x_n$ be real numbers such that $x_1+\cdots+x_n=1$ and $\alpha_i x_i+\beta_i\geq 0$ for all $i=1,\ldots,n$. Find the maximum value of

$$\sqrt{\alpha_1x_1+\beta_1}+\sqrt{\alpha_2x_2+\beta_2}+\cdots+\sqrt{\alpha_nx_n+\beta_n}.$$

4034. *Proposed by Michel Bataille.*

Evaluate

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16^n}\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{2n+1-k}\binom{2k}{k}\binom{4n-2k}{2n-k}.$$

4035. *Proposed by Daniel Sitaru and Leonard Giugiuc.*

Let a and b be two real numbers such that $ab=225$. Find all real solutions (in real 2×2 matrices) to the matrix equation

$$X^3-5X^2+6X=\begin{pmatrix}15 & a\\ b & 15\end{pmatrix}.$$

4036. *Proposed by Arkady Alt.*

Let a, b and c be non-negative real numbers. Prove that for any real $k\geq\frac{11}{24}$ we have:

$$k(ab+bc+ca)(a+b+c)-(a^2c+b^2a+c^2b)\leq\frac{(3k-1)(a+b+c)^3}{9}.$$

4037. *Proposed by Michel Bataille.*

Let P be a point of the incircle γ of a triangle ABC. The perpendiculars to BC, CA and AB through P meet γ again at U, V and W, respectively. Prove that the area of UVW is independent of the chosen point P on γ.

4038. *Proposed by George Apostopoulos.*

Let x, y, z be positive real numbers such that $x+y+z=xyz$. Find the minimum value of the expression

$$\sqrt{\frac{1}{3}x^4+1}+\sqrt{\frac{1}{3}y^4+1}+\sqrt{\frac{1}{3}z^4+1}.$$

4039. *Proposed by Abdilkadir Altinaş.*

In a triangle ABC, let $\angle CAB = 48^\circ$ and $\angle CBA = 12^\circ$. Suppose D is a point on AB such that $CD = 1$ and $AB = \sqrt{3}$. Find $\angle DCB$.

4040. *Proposed by Ali Behrouz.*

Find all functions $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ such that

$$(f(a)+b)f(a+f(b)) = (a+f(b))^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **August 1, 2016**, *although late solutions will also be considered until a solution is published.*

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

4041. *Proposed by Arkady Alt.*

Let a, b and c be the side lengths of a triangle ABC. Let AA', BB' and CC' be the heights of the triangle and let $a_p = B'C', b_p = C'A'$ and $c_p = A'B'$ be the sides of the orthic triangle. Prove that:

a) $a^2(b_p + c_p) + b^2(c_p + a_p) + c^2(a_p + b_p) = 3abc$;

b) $a_p + b_p + c_p \leq s$, where s is the semiperimeter of ABC.

4042. *Proposed by Leonard Giugiuc and Diana Trailescu.*

Let a, b and c be real numbers in $[0, \pi/2]$ such that $a + b + c = \pi$. Prove the inequality

$$2\sqrt{2}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} \geq \sqrt{\cos a\cos b\cos c}.$$

4043. *Proposed by Michel Bataille.*

Suppose that the lines m and n intersect at A and are not perpendicular. Let B be a point on n, with $B \neq A$. If F is a point of m, distinct from A, show that there exists a unique conic $\mathcal{C}_F$ with focus F and focal axis BF, intersecting n orthogonally at A. Given $\epsilon > 0$, how many of the conics $\mathcal{C}_F$ have eccentricity ϵ?

4044. *Proposed by Dragoljub Milošević.*

Let x, y, z be positive real numbers such that $x + y + z = 1$. Prove that

$$\frac{x+1}{x^3+1} + \frac{y+1}{y^3+1} + \frac{z+1}{z^3+1} \leq \frac{27}{7}.$$

4045. *Proposed by Galav Kapoor.*

Suppose that we have a natural number n such that $n \geq 10$. Show that by changing at most one digit of n, we can compose a number of the form $x^2 + y^2 + 10z^2$, where x, y, z are integers.

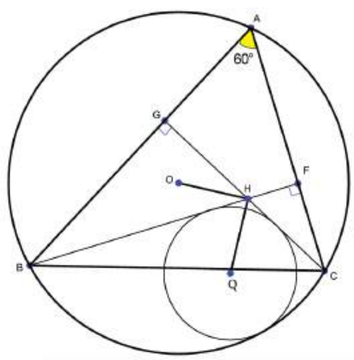
4046. *Proposed by Michel Bataille.*

Let a, b, c be nonnegative real numbers such that $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 1$. Prove that

$$a^2 + b^2 + c^2 + 7(ab + bc + ca) \geq \sqrt{8(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

4047. *Proposed by Abdilkadir Altinaş.*

Let ABC be a triangle with circumcircle O, orthocenter H and $\angle BAC = 60°$. Suppose the circle with centre Q is tangent to BH, CH and the circumcircle of ABC. Show that $OH \perp HQ$.



4048. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Let $n \geq 2$ be an integer and let $a_k \geq 1$ be real numbers, $1 \leq k \leq n$. Prove the inequality

$$a_1 a_2 \cdots a_n - \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \left(a_1 - \frac{1}{a_1}\right) + \left(a_2 - \frac{1}{a_2}\right) + \cdots + \left(a_n - \frac{1}{a_n}\right)$$

and study equality cases.

4049. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Evaluate

$$\int \frac{\sin x - x\cos x}{(x + \sin x)(x + 2\sin x)} dx$$

for all $x \in (0, \pi/2)$.

4050. *Proposed by Mehtaab Sawhney.*

Prove that

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{k, k, 2n-k, 2n-k} = \binom{4n}{2n}^2$$

for all nonnegative integers n.

. . . .

4041. *Proposé par Arkady Alt.*

Soit a, b et c les longueurs des côtés du triangle ABC et soit AA', BB' et CC' les hauteurs du triangle. De plus, soit $a_p = B'C', b_p = C'A'$ et $c_p = A'B'$ les longueurs des côtés de son triangle orthique. Démontrer que:

a) $a^2 (b_p + c_p) + b^2 (c_p + a_p) + c^2 (a_p + b_p) = 3abc$;

b) $a_p + b_p + c_p \leq s$, s étant le demi-périmètre du triangle ABC. (On a utilisé s au lieu de p pour éviter la confusion avec l'indice p.)

4042. *Proposé par Leonard Giugiuc et Diana Trailescu.*

Soit a, b et c des réels dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ tels que $a + b + c = \pi$. Démontrer que

$$2\sqrt{2} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \geq \sqrt{\cos a \cos b \cos c}.$$

4043. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit m et n deux droites non perpendiculaires qui se coupent en A. Soit B un point sur n, $B \neq A$. Étant donné un point F sur m, distinct de A, démontrer qu'il existe exactement une conique $\mathcal{C}_F$, ayant pour foyer F et pour axe focal BF, qui coupe n perpendiculairement en A. Étant donné ϵ ($\epsilon > 0$), combien des coniques $\mathcal{C}_F$ ont pour excentricité ϵ?

4044. *Proposé par Dragoljub Milošević.*

Soit x, y et z des réels strictement positifs tels que $x + y + z = 1$. Démontrer que

$$\frac{x+1}{x^3+1} + \frac{y+1}{y^3+1} + \frac{z+1}{z^3+1} \leq \frac{27}{7}.$$

4045. *Proposé par Galav Kapoor.*

Soit un entier n ($n \geq 10$). Démontrer qu'en changeant au plus un des chiffres de n, il est possible d'obtenir un nombre de la forme $x^2 + y^2 + 10z^2$, x, y et z étant des entiers.

4046. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit a, b et c des réels non négatifs tels que $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 1$. Démontrer que

$$a^2 + b^2 + c^2 + 7(ab + bc + ca) \geq \sqrt{8(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

4047. *Proposé par Abdilkadir Altinaş.*

Soit un triangle ABC avec $\angle BAC = 60^\circ$, H son orthocentre et O le centre du cercle circonscrit au triangle. On considère le cercle de centre Q qui est tangent à BH, à CH et au cercle circonscrit au triangle ABC. Démontrer que $OH \perp HQ$.

4048. *Proposé par Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Soit n un entier $(n \geq 2)$ et soit a_k des réels $(a_k \geq 1, 1 \leq k \leq n)$. Démontrer que

$$a_1 a_2 \cdots a_n - \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \left(a_1 - \frac{1}{a_1}\right) + \left(a_2 - \frac{1}{a_2}\right) + \cdots + \left(a_n - \frac{1}{a_n}\right)$$

et considérer les cas où il y a égalité.

4049. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Évaluer

$$\int \frac{\sin x - x \cos x}{(x + \sin x)(x + 2 \sin x)} dx$$

pour tout réel x dans l'intervalle $(0, \pi/2)$.

4050. *Proposé par Mehtaab Sawhney.*

Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{k, k, 2n-k, 2n-k} = \binom{4n}{2n}^2$$

pour tout entier non négatif n.

PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1 août 2016** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

La rédaction souhaite remercier André Ladouceur, Ottawa, ON, d'avoir traduit les problèmes.

4051. *Proposé par Arkady Alt.*

Soit a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle. Démontrer que

$$(a+b+c)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \geq 3abc\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

4052. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Soit k un réel fixe, $k < 0$, et soit a, b, c et d des réels tels que $a+b+c+d = 0$ et $ab+bc+cd+da+ac+bd = k$. Démontrer que $abcd \geq -k^2/12$ et déterminer les conditions pour qu'il y ait égalité.

4053. *Proposé par Šefket Arslanagić.*

Démontrer que

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma} + \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\cos\beta} \geq \frac{3}{2},$$

α, β et γ étant les angles d'un triangle acutangle.

4054. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Déterminer un nombre premier p tel que la somme des chiffres du nombre $(p^2-4)^2 - 117(p^2-4) + 990$ soit minimale.

4055. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Sachant que $x, y > 0, x \neq y$ et $0 < a < b < \frac{1}{2} < c < d < 1$, démontrer que

$$x\left[\left(\frac{y}{x}\right)^a + \left(\frac{y}{x}\right)^d - \left(\frac{y}{x}\right)^b - \left(\frac{y}{x}\right)^c\right] > y\left[\left(\frac{x}{y}\right)^b + \left(\frac{x}{y}\right)^c - \left(\frac{x}{y}\right)^a - \left(\frac{x}{y}\right)^d\right].$$

4056. *Proposé par Idrissi Abdelkrim-Amine.*

Soit n un entier, $n \geq 2$. On considère des réels a_k, $1 \leq k \leq n$, tels que $a_1 \geq 1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$ et $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}.$$

4057. *Proposé par Eeshan Banerjee.*

Soit ABC un triangle non obtusangle ayant pour aire Δ. Soit R le rayon de son cercle circonscrit et r le rayon de son cercle inscrit. Démontrer que

$$\Delta < \left(\frac{\frac{1}{r} + 3R + 3}{7} \right)^7 .$$

4058. *Proposé par Francisco Javier García Capitán.*

Soit un triangle ABC. Pour tout X sur la droite BC, soit X_b et X_c les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles ABX et AXC et soit P le point d'intersection de BX_c et de CX_b. Démontrer que le lieu géométrique du point P, lorsque X se déplace sur la droite BC, est la conique qui passe par le centre de gravité, l'orthocentre et les sommets B et C du triangle et dont les tangentes à ces sommets sont les symmédianes correspondantes. (À chaque sommet d'un triangle, la symmédiane est l'image de la médiane par une réflexion par rapport à la bissectrice de l'angle.)

4059. *Proposé par Marcel Chiriţa.*

Soit $a, b \in (0, \infty)$, $a \neq b$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\}$ telles que

$$f(ax) = e^x f(bx), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4060. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit

$$f(x, y) = \frac{xy(x + y)}{(1 - x - y)^3}.$$

Déterminer l'image de f lorsque son domaine est le cercle S défini par l'équation $x^2 + y^2 = 1 - 2x - 2y$.

. . . .

4051. *Proposed by Arkady Alt.*

Let a, b and c be the side lengths of a triangle. Prove that

$$(a + b + c) \left(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2\right) \geq 3abc \left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

4052. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Let $k < 0$ be a fixed real number. Let a, b, c and d be real numbers such that $a+b+c+d=0$ and $ab+bc+cd+da+ac+bd=k$. Prove that $abcd \geq -k^2/12$ and determine when equality holds.

4053. *Proposed by Šefket Arslanagić.*

Prove that
$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma}+\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\cos\beta}\geq\frac{3}{2},$$
where α, β and γ are angles of an acute triangle.

4054. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Find a prime p such that the number $(p^2-4)^2-117(p^2-4)+990$ has a minimum digit sum.

4055. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Prove that if $x, y > 0, x \neq y$ and $0 < a < b < \frac{1}{2} < c < d < 1$ then :
$$x\left[\left(\frac{y}{x}\right)^a+\left(\frac{y}{x}\right)^d-\left(\frac{y}{x}\right)^b-\left(\frac{y}{x}\right)^c\right] > y\left[\left(\frac{x}{y}\right)^b+\left(\frac{x}{y}\right)^c-\left(\frac{x}{y}\right)^a-\left(\frac{x}{y}\right)^d\right].$$

4056. *Proposed by Idrissi Abdelkrim-Amine.*

Let n be an integer, $n \geq 2$. Consider real numbers a_k, $1 \leq k \leq n$ such that $a_1 \geq 1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$ and $a_1a_2\ldots a_n = 1$. Prove that
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$

4057. *Proposed by Eeshan Banerjee.*

Let ABC be a non-obtuse triangle with circumradius R, inradius r and area Δ. Prove that
$$\Delta < \left(\frac{\frac{1}{r}+3R+3}{7}\right)^7.$$

4058. *Proposed by Francisco Javier García Capitán.*

Let ABC be a triangle. For any X on line BC, let X_b and X_c be the circumcenters of the triangles ABX and AXC, and let P be the intersection point of BX_c and CX_b. Prove that the locus of P as X varies along the line BC is the conic through the centroid, orthocenter, and vertices B and C, and whose tangents at these vertices are the corresponding symmedians. (Recall that a symmedian is the reflection of a median in the bisector of the corresponding angle.)

4059. *Proposed by Marcel Chiriţa.*

Let $a, b \in (0, \infty)$, $a \neq b$. Determine the functions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\}$ such that

$$f(ax) = e^x f(bx), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4060. *Proposed by Michel Bataille.*

Let

$$f(x, y) = \frac{xy(x+y)}{(1-x-y)^3}.$$

Find the range of $f(x, y)$ when its domain is restricted to the circle S that satisfies the equation $x^2 + y^2 = 1 - 2x - 2y$.

Math Quotes

The discovery in 1846 of the planet Neptune was a dramatic and spectacular achievement of mathematical astronomy. The very existence of this new member of the solar system, and its exact location, were demonstrated with pencil and paper ; there was left to observers only the routine task of pointing their telescopes at the spot the mathematicians had marked.

James R. Newman in J. R. Newman (ed.) "The World of Mathematics", New York : Simon and Schuster, 1956.

PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **September 1, 2016**, *although late solutions will also be considered until a solution is published.*

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

4061. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let ABC be a non-obtuse triangle none of whose angles are less than $\frac{\pi}{4}$. Find the minimum value of $\sin A \sin B \sin C$.

4062. *Proposed by D. M. Bătineţu-Giurgiu and Neculai Stanciu.*

Let L_n denote the nth Lucas number defined by $L_0 = 2, L_1 = 1$ and $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ for all $n \geq 0$. Prove that

$$\frac{L_n^4 + L_{n+1}^4}{L_n L_{n+1}} + \frac{L_{n+1}^4 + L_{n+3}^4}{L_{n+1} L_{n+3}} + \frac{L_{n+3}^4 + L_n^4}{L_{n+3} L_n} \geq \frac{2}{3} L_{n+4}^2.$$

4063. *Proposed by Marcel Chiriţă.*

Let a, b, c be real numbers greater than or equal to 3. Show that

$$\min\left(\frac{a^2b^2 + 3b^2}{b^2 + 27},\ \frac{b^2c^2 + 3c^2}{c^2 + 27},\ \frac{a^2c^2 + 3a^2}{a^2 + 27}\right) \leq \frac{abc}{9}.$$

4064. *Proposed by Michel Bataille.*

In the plane of a triangle ABC, let Γ be a circle whose centre O is not on the sidelines AB, BC, CA. Let A', B', C' be the poles of the lines BC, CA, AB with respect to Γ, respectively. Prove that

$$\frac{OA' \cdot B'C'}{OA \cdot BC} = \frac{OB' \cdot C'A'}{OB \cdot CA} = \frac{OC' \cdot A'B'}{OC \cdot AB}.$$

4065. *Proposed by Martin Lukarevski.*

Let ABC be a triangle with a, b, c as lengths of its sides and let R, r, s denote the circumradius, inradius and semiperimeter, respectively. Prove that

$$\frac{1}{(s-a)^2} + \frac{1}{(s-b)^2} + \frac{1}{(s-c)^2} \geq \frac{2}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

4066. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Prove that for $a, b, c > 0$ and $ab + ac + bc = 2016$,

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{2019^2}{2016}.$$

4067. *Proposed by Mehtaab Sawhney.*

Consider a graph G such that between any three vertices in G there are either 0 or 2 edges. Classify all such graphs G.

4068. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{a + 2b}{2a + 3b + c} + \frac{b + 2c}{a + 2b + 3c} + \frac{c + 2a}{3a + b + 2c} \leq \frac{3}{2}.$$

4069. *Proposed by D. M. Bătineţu-Giurgiu and Neculai Stanciu.*

Let $(u_n)_{n\geq 0}$ be an arithmetic progression with a positive common difference d and with $u_1 > 0$. Let $(x_n)_{n\geq 0}$ be a sequence with $x_0 = 0, x_1 = x_2 = 1$ and

$$\sum_{k=1}^{n} u_k x_k = u_n x_{n+2} + d(x_4 - x_{n+3}) - x_2 u_1,\ \forall n \geq 0.$$

Prove that $(x_n)_{n\geq 0}$ is the Fibonacci sequence.

4070. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Compute

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\ln n}\left(\frac{\arctan 1}{n} + \frac{\arctan 2}{n-1} + \cdots + \frac{\arctan\,(n-1)}{2} + \arctan n\right)\right].$$

. . . .

4061. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle non obtusangle dont la mesure de chaque angle est supérieure ou égale à $\frac{\pi}{4}$. Déterminer la valeur minimale de $\sin A \sin B \sin C$.

4062. *Proposé par D. M. Bătineţu-Giurgiu et Neculai Stanciu.*

Soit L_n le $n^{\text{ième}}$ nombre de Lucas défini par $L_0 = 2, L_1 = 1$ et $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ pour tout $n \geq 0$. Démontrer que

$$\frac{L_n^4 + L_{n+1}^4}{L_n L_{n+1}} + \frac{L_{n+1}^4 + L_{n+3}^4}{L_{n+1} L_{n+3}} + \frac{L_{n+3}^4 + L_n^4}{L_{n+3} L_n} \geq \frac{2}{3} L_{n+4}^2.$$

4063. *Proposé par Marcel Chiriţă.*

Soit a, b et c trois réels, chacun supérieur ou égal à 3. Démontrer que

$$\min\left(\frac{a^2b^2 + 3b^2}{b^2 + 27}, \frac{b^2c^2 + 3c^2}{c^2 + 27}, \frac{a^2c^2 + 3a^2}{a^2 + 27}\right) \leq \frac{abc}{9}.$$

4064. *Proposé par Michel Bataille.*

Dans le plan d'un triangle ABC, soit Γ un cercle dont le centre O n'est pas situé sur les droites AB, BC ou CA. Soit A', B' et C' les pôles respectifs des droites BC, CA et AB par rapport à Γ. Démontrer que

$$\frac{OA' \cdot B'C'}{OA \cdot BC} = \frac{OB' \cdot C'A'}{OB \cdot CA} = \frac{OC' \cdot A'B'}{OC \cdot AB}.$$

4065. *Proposé par Martin Lukarevski.*

Soit ABC un triangle et a, b et c les longueurs de ses côtés. Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle, r le rayon du cercle inscrit dans le triangle et p le demi-périmètre du triangle. Démontrer que

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{2}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

4066. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit a, b et c des réels strictement positifs tels que $ab + ac + bc = 2016$. Démontrer que

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{2019^2}{2016}.$$

4067. *Proposé par Mehtaab Sawhney.*

On considère un graphe G de manière qu'entre n'importe quels trois sommets de G il existe 0 arc ou 2 arcs. Classifier tous les graphes G de cette sorte.

4068. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit a, b et c des réels strictement positifs. Démontrer que

$$\frac{a+2b}{2a+3b+c}+\frac{b+2c}{a+2b+3c}+\frac{c+2a}{3a+b+2c}\leq\frac{3}{2}.$$

4069. *Proposé par D. M. Bătineţu-Giurgiu et Neculai Stanciu.*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique dont la raison d est strictement positive et $u_1 > 0$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $x_0 = 0, x_1 = x_2 = 1$ et

$$\sum_{k=1}^{n} u_k x_k = u_n x_{n+2} + d(x_4 - x_{n+3}) - x_2 u_1,\ \forall n \geq 0.$$

Démontrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ est la suite de Fibonacci.

4070. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln n}\left(\frac{\arctan 1}{n}+\frac{\arctan 2}{n-1}+\cdots+\frac{\arctan\,(n-1)}{2}+\arctan n\right)\right].$$

Math Quotes

Games are among the most interesting creations of the human mind, and the analysis of their structure is full of adventure and surprises. Unfortunately there is never a lack of mathematicians for the job of transforming delectable ingredients into a dish that tastes like a damp blanket.

James R. Newman in J. R. Newman (ed.) "The World of Mathematics", New York : Simon and Schuster, 1956.

PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1 octobre 2016** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

La rédaction souhaite remercier André Ladouceur, Ottawa, ON, d'avoir traduit les problèmes.

4071. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Prove that if $a, b, c \in (0,1)$, then $a^{a+1}b^{b+1}c^{c+1} < e^{2(a+b+c)-6}$.

4072. *Proposed by Michel Bataille.*

Let a, b be distinct positive real numbers and $A = \frac{a+b}{2},\ G = \sqrt{ab},\ L = \frac{a-b}{\ln a - \ln b}$. Prove that

$$\frac{L}{G} > \frac{4A+5G}{A+8G}.$$

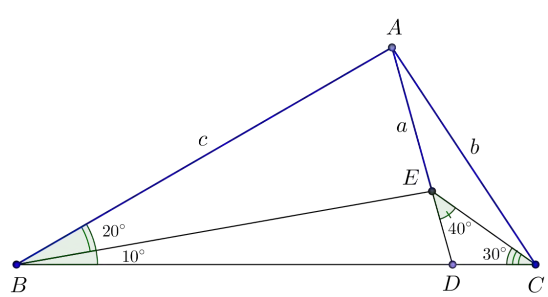
4073. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Solve the following system :

$$\begin{cases} \sin 2x + \cos 3y = -1, \\ \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y} + \sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y} = 1 + \sin(x+y). \end{cases}$$

4074. *Proposed by Abdilkadir Altinaş.*

Consider the triangle ABC with the following measures :



Show that $a + b = c$; that is, $|AE| + |AC| = |AB|$.

4075. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Prove that in any triangle ABC with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ the following inequality holds :

$$\sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq 4[ABC],$$

where $[ABC]$ is the area of triangle ABC.

4076. *Proposed by Mehtaab Sawhney.*

Prove that

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 \geq (x^3 + y^3 + z^3 + 3(\sqrt{3} - 1)xyz)^2$$

for all nonnegative reals x, y, and z.

4077. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let ABC be a triangle. Prove that

$$\sin\frac{A}{2} \cdot \sin B \cdot \sin C + \sin A \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin C + \sin A \cdot \sin B \cdot \sin\frac{C}{2} \leq \frac{9}{8}.$$

4078. *Proposed by Michel Bataille.*

Given θ such that $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}$, let M_0 be a point of a circle with centre O and radius R and M_k its image under the counterclockwise rotation with centre O and angle $k\theta$. If M is the point diametrically opposite to M_0 and n is a positive integer, show that

$$\sum_{k=0}^{n} MM_k \geq (2n + 1) \cdot \frac{R}{2}.$$

4079. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let $x, y, z > 0$ and $x + y + z = 2016$. Prove that :

$$x\sqrt{\frac{yz}{y + 2015z}} + y\sqrt{\frac{xz}{z + 2015x}} + z\sqrt{\frac{xy}{x + 2015z}} \leq \frac{2016}{\sqrt{3}}.$$

4080. *Proposed by Alina Sîntămărian and Ovidiu Furdui.*

Let $a, b \in \mathbb{R}$, with $ab > 0$. Calculate

$$\int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2} \mathrm{d}x.$$

. . . .

4071. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Soit $a, b, c \in (0, 1)$. Démontrer que

$$a^{a+1}b^{b+1}c^{c+1} < e^{2(a+b+c)-6}.$$

4072. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit a et b des réels strictement positifs distincts et soit $A = \frac{a+b}{2}$, $G = \sqrt{ab}$ et $L = \frac{a-b}{\ln a - \ln b}$. Démontrer que

$$\frac{L}{G} > \frac{4A+5G}{A+8G}.$$

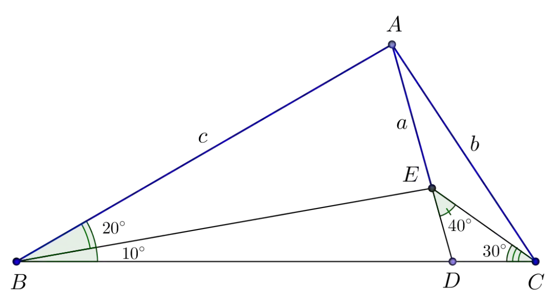
4073. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Résoudre ce système d'équations :

$$\begin{cases} \sin 2x + \cos 3y = -1, \\ \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y} + \sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y} = 1 + \sin(x+y). \end{cases}$$

4074. *Proposé par Abdilkadir Altinaş.*

On considère le triangle ABC dans la figure suivante :



Démontrer que $a + b = c$.

4075. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Soit un triangle ABC avec $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$. Démontrer que

$$\sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq 4[ABC],$$

$[ABC]$ étant l'aire du triangle ABC.

4076. *Proposé par Mehtaab Sawhney.*

Démontrer que pour tous réels non négatifs x, y et z,

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 \geq (x^3 + y^3 + z^3 + 3(\sqrt{3} - 1)xyz)^2.$$

4077. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Étant donné un triangle ABC, démontrer que

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin B\cdot\sin C+\sin A\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin C+\sin A\cdot\sin B\cdot\sin\frac{C}{2}\leq\frac{9}{8}.$$

4078. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit θ tel que $\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{5\pi}{3}$, soit M_0 un point sur un cercle de centre O et de rayon R et soit M_k son image par une rotation de centre O et d'angle $k\theta$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre . Sachant que M est le point diamétralement opposé à M_0 et que n est un entier strictement positif, démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} MM_k\geq(2n+1)\cdot\frac{R}{2}.$$

4079. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit x, y et z des réels strictement positifs tels que $x+y+z=2016$. Démontrer que

$$x\sqrt{\frac{yz}{y+2015z}}+y\sqrt{\frac{xz}{z+2015x}}+z\sqrt{\frac{xy}{x+2015z}}\leq\frac{2016}{\sqrt{3}}.$$

4080. *Proposé par Alina Sîntămărian et Ovidiu Furdui.*

Soit a et b des réels tels que $ab>0$. Déterminer la valeur de

$$\int_0^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2}\mathrm{d}x.$$

PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **November 1, 2016**, *although late solutions will also be considered until a solution is published.*

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

An asterisk ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

4081. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Determine all $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ such that:

$$\begin{cases} A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 22 & 44 \\ 14 & 28 \end{pmatrix}, \\ AB + BA = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

4082. *Proposed by D. M. Bătineţu-Giurgiu and Neculai Stanciu.*

Let ABC be a right-angle triangle with $\angle A = 90^\circ$ and $BC = a$, $AC = b$ and $AB = c$. Consider the Fibonacci sequence F_n with $F_0 = F_1 = 1$ and $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ for all non-negative integers n. Prove that

$$\frac{F_m^2}{(bF_n + cF_p)^2} + \frac{F_n^2}{(bF_p + cF_m)^2} + \frac{F_p^2}{(bF_m + cF_n)^2} \geq \frac{3}{2a^2}$$

or all non-negative integers m, n, p.

4083. *Proposed by Ovidiu Furdui.*

Calculate

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \int_0^n \frac{x}{1 + n\cos^2 x} \mathrm{d}x.$$

4084. *Proposed by Michel Bataille.*

In the plane, let Γ be a circle and A, B be two points not on Γ. Determine when $\frac{MA}{MB}$ is not independent of M on Γ and, in these cases, construct with ruler and compass I and S on Γ such that

$$\frac{IA}{IB} = \inf\left\{\frac{MA}{MB} : M \in \Gamma\right\} \quad \text{and} \quad \frac{SA}{SB} = \sup\left\{\frac{MA}{MB} : M \in \Gamma\right\}.$$

4085. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero. Correction.*

Let ABC be an acute triangle. Prove that

$$\sqrt[4]{\sin(\cos A)\cdot\cos B}+\sqrt[4]{\sin(\cos B)\cdot\cos C}+\sqrt[4]{\sin(\cos C)\cdot\cos A}<\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

4086. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Let be $f:[0,1]\to\mathbb{R}$; f twice differentiable on $[0,1]$ and $f''(x)<0$ for all $x\in[0,1]$. Prove that

$$25\int_{\frac{1}{5}}^{1}f(x)dx\geq 16\int_{0}^{1}f(x)dx+4f(1).$$

4087. *Proposed by Lorian Saceanu.*

If S is the area of triangle ABC, prove that

$$m_a(b+c)+2m_a^2\geq 4S\sin A,$$

where b and c are the lengths of sides that meet in vertex A, and m_a is the length of the median from that vertex; furthermore, equality holds if and only if $b=c$ and $\angle A=120^\circ$.

4088. *Proposed by Ardak Mirzakhmedov.*

Let a,b and c be positive real numbers such that $a^2b+b^2c+c^2a+a^2b^2c^2=4$. Prove that

$$a^2+b^2+c^2+abc(a+b+c)\geq 2(ab+bc+ca).$$

4089. *Proposed by Daniel Sitaru and Leonard Giugiuc.*

Let a,b,c and d be real numbers with $0<a<b<c<d$. Prove that

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}>3+\ln\frac{d}{a}.$$

4090. *Proposed by Nermin Hodžić and Salem Malikić.*

Let a,b and c be non-negative real numbers such that $a^2+b^2+c^2=3$. Prove that

$$\frac{a}{3b^2+6c-bc}+\frac{b}{3c^2+6a-ca}+\frac{c}{3a^2+6b-ab}\geq\frac{3}{8}.$$

. . . .

4081. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Déterminer toutes les matrices $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que:

$$\begin{cases} A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 22 & 44 \\ 14 & 28 \end{pmatrix}, \\ AB + BA = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

4082. *Proposé par D. M. Bătineţu-Giurgiu et Neculai Stanciu.*

Soit ABC un triangle rectangle tel que $\angle A = 90^\circ$, $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. Soit F_n la suite de Fibonacci définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout entier non négatif n. Démontrer que

$$\frac{F_m^2}{(bF_n + cF_p)^2} + \frac{F_n^2}{(bF_p + cF_m)^2} + \frac{F_p^2}{(bF_m + cF_n)^2} \geq \frac{3}{2a^2}$$

pour tout entier non négatif m, n et p.

4083. *Proposé par Ovidiu Furdui.*

Évaluer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \int_0^n \frac{x}{1 + n\cos^2 x} \mathrm{d}x.$$

4084. *Proposé par Michel Bataille.*

Dans le plan, soit un cercle Γ et deux points, A et B, qui ne sont pas sur Γ. Déterminer les conditions qui font que $\frac{MA}{MB}$ n'est pas indépendant d'un point M sur Γ. De plus, construire avec compas et règle deux points I et S sur Γ tels que

$$\frac{IA}{IB} = \inf \left\{ \frac{MA}{MB} : M \in \Gamma \right\} \quad \text{et} \quad \frac{SA}{SB} = \sup \left\{ \frac{MA}{MB} : M \in \Gamma \right\}.$$

4085. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero. Correction.*

Soit ABC un triangle acutangle. Démontrer que

$$\sqrt[4]{\sin(\cos A) \cdot \cos B} + \sqrt[4]{\sin(\cos B) \cdot \cos C} + \sqrt[4]{\sin(\cos C) \cdot \cos A} < \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

4086. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Soit une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et telle que $f''(x) < 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Démontrer que

$$25 \int_{\frac{1}{5}}^1 f(x)dx \geq 16 \int_0^1 f(x)dx + 4f(1).$$

4087. *Proposé par Lorian Saceanu.*

Soit S l'aire d'un triangle ABC, $b = AC$, $c = AB$ et m_a la longueur de la médiane issue de A. Démontrer que

$$m_a(b+c) + 2m_a^2 \geq 4S \sin A$$

et démontrer qu'il y a égalité si et seulement si $b = c$ et $\angle A = 120°$.

4088. *Proposé par Ardak Mirzakhmedov.*

Soit a, b et c des réels strictement positifs tels que $a^2b + b^2c + c^2a + a^2b^2c^2 = 4$. Démontrer que

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc(a+b+c) \geq 2(ab+bc+ca).$$

4089. *Proposé par Daniel Sitaru et Leonard Giugiuc.*

Soit a, b, c et d des réels tels que $0 < a < b < c < d$. Démontrer que

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} > 3 + \ln \frac{d}{a}.$$

4090. *Proposé par Nermin Hodžić et Salem Malikić.*

Soit a, b et c des réels non négatifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Démontrer que

$$\frac{a}{3b^2 + 6c - bc} + \frac{b}{3c^2 + 6a - ca} + \frac{c}{3a^2 + 6b - ab} \geq \frac{3}{8}.$$

PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er décembre 2016** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

La rédaction souhaite remercier André Ladouceur, Ottawa, ON, d'avoir traduit les problèmes.

4091. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Déterminer le plus grand nombre strictement positif k de manière que

$$a+b+c+3k-3 \geq k\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{b}}+\sqrt[3]{\frac{a}{c}}\right)$$

pour tous nombres strictement positifs a, b et c tels que $abc=1$.

4092. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Démontrer que

$$\left[\frac{a^2+16a+80}{16\,(a+4)}+\frac{2}{\sqrt{2\,(b^2+16)}}\right]\left[\frac{b^2+16b+80}{16\,(b+4)}+\frac{2}{\sqrt{2\,(a^2+16)}}\right] \geq \frac{9}{4}$$

pour tous réels a et b strictement positifs. Quelles sont les conditions pour qu'il y ait égalité ?

4093. *Proposé par Dragolijub Milošević.*

Soit ABC un triangle quelconque. Soit r le rayon du cercle inscrit dans le triangle et R le rayon du cercle circonscrit au triangle. Soit m_a la longueur de la médiane du sommet A au côté BC et w_a la longueur de la bissectrice de l'angle A jusqu'au côté BC. Les longueurs m_b, m_c, w_b et w_c sont définies de la même façon. Démontrer que

$$\frac{a^2}{m_a w_a}+\frac{b^2}{m_b w_b}+\frac{c^2}{m_c w_c} \leq 4\left(\frac{R}{r}-1\right).$$

4094. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels tels que $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Démontrer que

$$n-1+\cosh\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\cosh x_k \leq n-1+\cosh\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right).$$

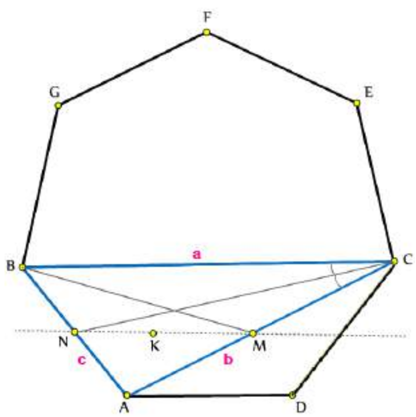
4095. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit a, b et c des réels positifs tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Démontrer que

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)+4abc.$$

4096. *Proposé par Abdilkadir Altintaş.*

Soit ABC un triangle heptagonal, $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. Soit CN la bissectrice de l'angle BCA et BM la médiane issue du sommet B, N et M étant des points sur les côtés respectifs AB et AC. Soit K le point de Lemoine (point d'intersection des symédianes) du triangle ABC. Démontrer que les points N, K et M sont alignés.



4097. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soit a_i des réels, $1 \leq i \leq 6$, tels que

$$\sum_{i=1}^{6} a_i = \frac{15}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{6} a_i^2 = \frac{45}{4}.$$

Démontrer que $\prod_{i=1}^{6} a_i \leq \dfrac{5}{2}$.

4098. *Proposé par Ardak Mirzakhmedov.*

Soit α, β et γ des angles aigus tels que $\alpha+\beta=\gamma$. Démontrer que

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1 \geq 2\sqrt{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}.$$

4099. *Proposé par Lorian Saceanu.*

Soit ABC un triangle acutangle. Les bissectrices des angles A, B et C coupent les côtés du triangle ABC aux points respectifs A', B' et C' et elles coupent le cercle circonscrit au triangle ABC aux points respectifs L, M et N. Soit I le point d'intersection de ces bissectrices. Démontrer que :

a) $\dfrac{AI}{IL} = \dfrac{IA'}{A'L}$,

b) $\sqrt{\dfrac{AI}{IL}} + \sqrt{\dfrac{BI}{IM}} + \sqrt{\dfrac{CI}{IN}} \geq 3.$

4100. *Proposé par Daniel Sitaru et Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle quelconque avec $\angle A < 90°$. Soit S l'aire du triangle, $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. Démontrer que

$$\frac{c\cos B}{ac+2S} + \frac{b\cos C}{ab+2S} < \frac{a}{2S}.$$

. . . .

4091. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Find the greatest positive number k such that

$$a+b+c+3k-3 \geq k\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{b}} + \sqrt[3]{\frac{a}{c}}\right)$$

for any positive numbers a, b and c with $abc = 1$.

4092. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Show that

$$\left[\frac{a^2+16a+80}{16\,(a+4)} + \frac{2}{\sqrt{2\,(b^2+16)}}\right]\left[\frac{b^2+16b+80}{16\,(b+4)} + \frac{2}{\sqrt{2\,(a^2+16)}}\right] \geq \frac{9}{4}$$

for all $a, b > 0$. When does equality hold ?

4093. *Proposed by Dragolijub Milošević.*

Let ABC be an arbitrary triangle. Let r and R be the inradius and the circumradius of ABC, respectively. Let m_a be the length of the median from vertex A to side BC and let w_a be the length of the internal bisector of $\angle A$ to side BC. Define m_b, m_c, w_b and w_c similarly. Prove that

$$\frac{a^2}{m_a w_a} + \frac{b^2}{m_b w_b} + \frac{c^2}{m_c w_c} \leq 4\left(\frac{R}{r} - 1\right).$$

4094. *Proposed by Michel Bataille.*

Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be real numbers such that $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Prove that

$$n-1+\cosh\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\cosh x_k \leq n-1+\cosh\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right).$$

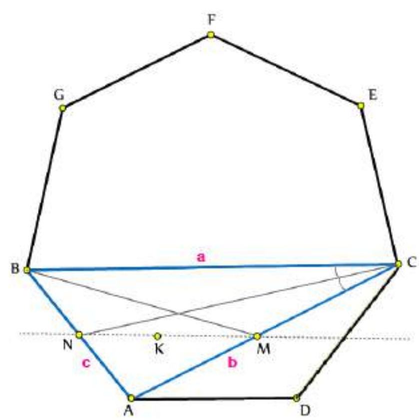
4095. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let a, b and c be positive real numbers with $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Prove that

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)+4abc.$$

4096. *Proposed by Abdilkadir Altintaş.*

Let ABC be a heptagonal triangle with $BC=a$, $AC=b$ and $AB=c$. Suppose CN is the internal angle bisector of $\angle BCA$, BM is the median of triangle ABC and K is the symmedian point of ABC. Show that N, K and M are collinear.



4097. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let $a_i, 1 \leq i \leq 6$ be real numbers such that

$$\sum_{i=1}^{6}a_i=\frac{15}{2} \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{6}a_i^2=\frac{45}{4}.$$

Prove that $\prod_{i=1}^{6}a_i \leq \dfrac{5}{2}$.

4098. *Proposed by Ardak Mirzakhmedov.*

Let α, β and γ be acute angles such that $\alpha+\beta=\gamma$. Show that

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1 \geq 2\sqrt{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}.$$

4099. *Proposed by Lorian Saceanu.*

Let ABC be an acute angle triangle. Suppose the internal bisectors of angles A, B and C intersect the sides of ABC in points A', B' and C' and they intersect the circumcircle of ABC in points L, M and N respectively. Let I be the point of intersection of all internal bisectors. Show that :

a) $\dfrac{AI}{IL} = \dfrac{IA'}{A'L}$,

b) $\sqrt{\dfrac{AI}{IL}} + \sqrt{\dfrac{BI}{IM}} + \sqrt{\dfrac{CI}{IN}} \geq 3.$

4100. *Proposed by Daniel Sitaru and Leonard Giugiuc.*

Let ABC be an arbitrary triangle with area S, $\angle A < 90^\circ$ and sides $BC = a$, $AC = b$ and $AB = c$. Show that

$$\frac{c\cos B}{ac + 2S} + \frac{b\cos C}{ab + 2S} < \frac{a}{2S}.$$