

Resolver:

$$(x^2\pi^2 + e^2)(x^{2^2}\pi^{2^2} + e^{2^2})(x^{2^3}\pi^{2^3} + e^{2^3}) \dots (x^{2^{2018}}\pi^{2^{2018}} + e^{2^{2018}}) = e^{2^{2019}-2}$$

Solución:

Multiplicando a la ecuación por el factor: $(x^2\pi^2 - e^2)$, resulta:

$$\underbrace{(x^2\pi^2 - e^2)(x^2\pi^2 + e^2)}_{\text{Producto Notable}}(x^{2^2}\pi^{2^2} + e^{2^2})(x^{2^3}\pi^{2^3} + e^{2^3}) \dots (x^{2^{2018}}\pi^{2^{2018}} + e^{2^{2018}}) = e^{2^{2019}-2}(x^2\pi^2 - e^2)$$

Se observa que el desarrollo del Producto Notable es una Diferencia de Cuadrados:

$$(x^2\pi^2 - e^2)(x^2\pi^2 + e^2) = (x^2\pi^2)^2 - (e^2)^2 = x^{2^2}\pi^{2^2} - e^{2^2}$$

Entonces reemplazando este resultado en la ecuación:

$$\underbrace{(x^{2^2}\pi^{2^2} - e^{2^2})(x^{2^2}\pi^{2^2} + e^{2^2})}_{\text{Producto Notable}}(x^{2^3}\pi^{2^3} + e^{2^3}) \dots (x^{2^{2018}}\pi^{2^{2018}} + e^{2^{2018}}) = e^{2^{2019}-2}(x^2\pi^2 - e^2)$$

Se observa nuevamente que el desarrollo del Producto Notable es una Diferencia de Cuadrados:

$$(x^{2^2}\pi^{2^2} - e^{2^2})(x^{2^2}\pi^{2^2} + e^{2^2}) = (x^{2^2}\pi^{2^2})^2 - (e^{2^2})^2 = x^{2^3}\pi^{2^3} - e^{2^3}$$

Reemplacemos nuevamente este resultado:

$$\underbrace{(x^{2^3}\pi^{2^3} - e^{2^3})(x^{2^3}\pi^{2^3} + e^{2^3})}_{\text{Producto Notable}} \dots (x^{2^{2018}}\pi^{2^{2018}} + e^{2^{2018}}) = e^{2^{2019}-2}(x^2\pi^2 - e^2)$$

Notamos que se repetirá este procedimiento varias veces, hasta llegar a desarrollar el siguiente Producto Notable:

$$(x^{2^{2018}}\pi^{2^{2018}} - e^{2^{2018}})(x^{2^{2018}}\pi^{2^{2018}} + e^{2^{2018}}) = (x^{2^{2018}}\pi^{2^{2018}})^2 - (e^{2^{2018}})^2 = x^{2^{2019}}\pi^{2^{2019}} - e^{2^{2019}}$$

Con esto observamos que la ecuación adquiere la siguiente forma:

$$x^{2^{2019}}\pi^{2^{2019}} - e^{2^{2019}} = e^{2^{2019}-2}(x^2\pi^2 - e^2)$$

Desarrollando el producto del segundo miembro:

$$x^{2^{2019}}\pi^{2^{2019}} - e^{2^{2019}} = e^{2^{2019}-2}x^2\pi^2 - e^{2^{2019}}$$

Simplificando la ecuación:

$$x^{2^{2019}}\pi^{2^{2019}} = e^{2^{2019}-2}x^2\pi^2 \rightarrow (x\pi)^{2^{2019}} - e^{2^{2019}-2}(x\pi)^2 = 0$$

Factorizando:

$$(x\pi)^2[(x\pi)^{2^{2019}-2} - e^{2^{2019}-2}] = 0 \rightarrow \underbrace{x^2}_{=0} \underbrace{[(x\pi)^{2^{2019}-2} - e^{2^{2019}-2}]}_{=0} = 0 \rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ (x\pi)^{2^{2019}-2} - e^{2^{100}-2} = 0 \rightarrow (x\pi)^{2^{2019}-2} = e^{2^{100}-2} \rightarrow x\pi = e \rightarrow x = \frac{e}{\pi} \text{ (No Satisface)} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{x = 0}$$