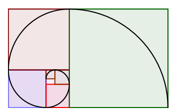
Trigonometria Pura e Aplicações e um pouco além: problemas de Olimpíadas

Israel Meireles Chrisostomo
israelmchrisostomo@gmail.com

3 de Julho, 2015



"Nas questões matemáticas não se compreende a incerteza nem a dúvida, assim como tampouco se podem estabelecer distinções entre verdades médias e verdades de grau superior."

(David Hilbert)

"Sir, an equation has no meaning for me unless it expresses a thought of GOD."

(Srinivasa Ramanaujan)

1 Considerações iniciais

Neste artigo se encontram minhas soluções de alguns problemas que julguei serem interessantes, seja por admitirem abordagens criativas em suas soluções, seja pela generalidade na forma em que se apresentam, características que julgo serem apropriadas para se avaliar a relevância de qualquer ideia em matemática.

O texto foi escrito, em sua maior parte, para alunos do ensino médio e acredito que o aluno curioso não terá dificuldades em acompanhar o que está escrito, pois certamente tentará demonstrar as desigualdades que aqui estão ou terá a oportunidade de pesquisar, embora algumas partes exijam conhecimento de graduação.

Os problemas que estão aqui foram retirados de diversos livros, e sempre que possível, vou deixar a indicação, entre parênteses, de onde esses problemas foram retirados.Quando não houver uma indicação clara entre parênteses de onde o problema foi retirado, há um único motivo: isto se deve ao fato de eu ter visto o problema alguma vez em um site, blog, PDF na internet, embora não tenha me recordado de sua origem.

Minha sugestão é que o aluno resolva os problemas antes de olhar a solução, tendo em vista que as desigualdades e relações do início do artigo foram propositalmente deixadas com o intuito de dar ao aluno a oportunidade de conhecer relações que podem vir a ser necessárias, mas não indispensáveis, para resolver os problemas.Em muitos casos, o leitor poderá encontrar soluções muito mais simples para os problemas, ao leitor fica esse encargo.Por fim, espero que o leitor possa aprender algo com o conteúdo desse PDF.

2 Desigualdades e Identidades importantes

Sejam alpha, beta e gamma ângulos de um triângulo, então, valem as desigualdades:

$1. cos\alpha + cos\beta + cos\gamma \leq sen\frac{\alpha}{2} + sen\frac{\beta}{2} + sen\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$

$2. sen\alpha + sen\beta + sen\gamma \leq cos\frac{\alpha}{2} + cos\frac{\beta}{2} + cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$3. cos\alpha cos\beta cos\gamma \leq sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$

$4. sen\alpha sen\beta sen\gamma \leq cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

$5. cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma \geq sen^2\frac{\alpha}{2} + sen^2\frac{\beta}{2} + sen^2\frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}$

$6. sen^2\alpha + sen^2\beta + sen^2\gamma \leq cos^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\beta}{2} + cos^2\frac{\gamma}{2} \leq \frac{9}{4}$

$7. cot\alpha + cot\beta + cot\gamma \geq tan\frac{\alpha}{2} + tan\frac{\beta}{2} + tan\frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$

Sejam alpha, beta e gamma ângulos de um triângulo, então, valem as identidades:

$1. cos\alpha + cos\beta + cos\gamma = 1 + 4sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}$

$2. sen\alpha + sen\beta + sen\gamma = 4cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$

$3. sen2\alpha + sen2\beta + sen2\gamma = 4sen\alpha sen\beta sen\gamma$

$4. sen^2\alpha + sen^2\beta + sen^2\gamma = 2 + 2cos\alpha cos\beta cos\gamma$

$5. sen^2\frac{\alpha}{2} + sen^2\frac{\beta}{2} + sen^2\frac{\gamma}{2} + 2sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2} = 1$

$6. tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\beta}{2} + tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\gamma}{2} + tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2} = 1$

$7. tan\alpha + tan\beta + tan\gamma = tan\alpha tan\beta tan\gamma$

Lei dos senos:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R$$

Lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$$

Identidades trigonométricas válidas para alpha, beta, gamma,
$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$1.cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$

$2.1 + tan^2\alpha = sec^2\alpha \Leftrightarrow \alpha \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}$

$3.1 + cot^2\alpha = csc^2\alpha \Leftrightarrow \alpha \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$

$4.cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha$

$5.cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta$

$6.sen(\alpha) + sen(\beta) = 2sen\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$7.sen(\alpha) - sen(\beta) = 2sen\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$8.cos(\alpha) + cos(\beta) = 2cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$9.cos(\alpha) - cos(\beta) = -2sen\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$10.tan(\alpha + \beta) = \dfrac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan(\alpha)tan(\beta)} \Leftrightarrow \alpha + \beta \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}$

$11.sen\alpha = \dfrac{2tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

$12.cos\alpha = \dfrac{1 - tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

$13.cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$

$14.cos2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha$

$15.tan(3\alpha) = \dfrac{3tan\alpha - tan^3\alpha}{1 - 3tan^2\alpha} \Leftrightarrow \alpha \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{6}, \forall k \in \mathbb{Z}$

$16.sen2\alpha = 2sen\alpha cos\alpha$

$17.tan(\alpha + \beta + \gamma) = \dfrac{tan\alpha + tan\beta + tan\gamma - tan\alpha tan\beta tan\gamma}{1 - tan\alpha tan\beta - tan\beta tan\gamma - tan\beta tan\gamma} \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma \neq$
$\dfrac{(2k+1)\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}$

Sejam $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ reais positivos, então valem as desigualdades:

Desigualdade entre as Médias Aritmética, Geométrica e Harmônica:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + ... + a_n b_n)^2$$

Desigualdade de Jensen:

Sejam I um intervalo da reta e $f : I \to R$ uma função.Sejam $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in I$ e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n \in [0, 1]$, e tal que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + ... + \lambda_n = 1$, valem as desigualdades:

Se f é côncova:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + ... + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3) + ... + \lambda_n f(x_n)$$

Se f é convexa:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3) + ... + \lambda_n f(x_n)$$

Dizemos que uma função $f : I \to R$ é convexa se $\forall (x_1, x_2) \in I$ e $\forall \alpha \in [0, 1]$ então :

$$f((1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq (1 - \alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2)$$

Dizemos que uma função $f : I \to R$ é côncava se $\forall (x_1, x_2) \in I$ e $\forall \alpha \in [0, 1]$ então :

$$f((1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2) \geq (1 - \alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2)$$

Desigualdade de Chebychev:

Sejam $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq ... \leq b_n$, então, vale que:

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + ... + a_n b_n}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}\right) \times \left(\frac{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n}{n}\right)$$

Desigualdade do rearranjo:

Sejam $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq ... \leq b_n$, seja $(c_1, c_2, c_3, ...c_n)$ uma permutação da sequência $(b_1, b_2, b_3, ...b_n)$, vale que:

$$a_1b_n + ... + a_nb_1 \leq a_1c_1 + ... + a_nc_n \leq a_1b_1 + ... + a_nb_n$$

Desigualdade entre as Médias Quadrática e Aritmética:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$

Desigualdade de Minkowsky:

$$\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p + a_3^p + ... + a_n^p} + \sqrt[p]{b_1^p + b_2^p + b_3^p + ... + b_n^p} \geq \sqrt[p]{(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + ... + (a_n + b_n)^p}$$

Desigualdade de Holder:

Sejam $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, ..., \lambda_z$ tais que $\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c + ... + \lambda_z = 1$,e $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ..., z_1, z_2, z_3, ..., z_n$, reais positivos, vale que:

$(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)^{\lambda_a}(b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n)^{\lambda_b}....(z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n)^{\lambda_z} \geq$
$a_1^{\lambda_a}b_1^{\lambda_b}...z_1^{\lambda_z} + a_2^{\lambda_a}b_2^{\lambda_b}...z_2^{\lambda_z} + a_3^{\lambda_a}b_3^{\lambda_b}...z_3^{\lambda_z} + ... + a_n^{\lambda_a}b_n^{\lambda_b}...z_n^{\lambda_z}$

Desigualdade de Giroux:

Sejam $I_1, I_2, I_3, ..., I_n$ intervalos fechados da reta e seja a função $f : I_1 \times I_2 \times I_3 \times ... \times I_n \to \mathbb{R}$ de n variáveis, convexa separadamente em relação a cada variável.Então, se $I_j = [a_j, b_j]$, f atinge seu valor máximo em um dos 2^n pontos da forma $(c_1, c_2, c_3, ..., c_n)$ com $c_i = a_i$ ou $c_i = b_i$ para cada i.

Desigualdade entre as Médias de Potências:

Sejam $v > u$, então vale:

$$\left(\frac{a_1^v + a_2^v + a_3^v + ... + a_n^v}{n}\right)^{\frac{1}{v}} \geq \left(\frac{a_1^u + a_2^u + a_3^u + ... + a_n^u}{n}\right)^{\frac{1}{u}}$$

Desigualdade de Bernoulli:

Seja n um natural, e $x \in \mathbb{R}, x \geq -1$, então, vale que:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Desigualdade de Newton:

Seja $d_k = \frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}}$, tal que $\sigma_k = \sum_{sym} a_1a_2..a_k$ e $k \in \mathbb{N}|k \leq n$, então vale:

$$d_k^2 \geq d_{k-1}d_{k+1}$$

Desigualdade de Maclaurin:

Seja $d_k = \frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}}$, tal que $\sigma_k = \sum_{sym} a_1a_2..a_k$, e $k \in \mathbb{N}|k \leq n$, então vale:

$$d_1 \geq \sqrt{d_2} \geq \sqrt[3]{d_3} \geq ... \geq \sqrt[n]{d_n}$$

Desigualdade de Schur:

Sejam $x, y, z \geq 0$, $t > 0$, vale que:

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-x)(y-z) + z^t(z-x)(z-y) \geq 0$$

Desigualdade de Muirhead:

Dizemos que uma sequência $(a_1, a_2, a_3, ...a_n)$ majora a sequência $(b_1, b_2, b_3, ...b_k)$ quando $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k \geq b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_k, \forall k|1 \leq k \leq n-1$ e $a_1+a_2+a_3+...+a_n = b_1+b_2+b_3+...+b_n$, e denotamos isso por $a_1+a_2+a_3+ ... + a_n \succ b_1+b_2+b_3+...+b_n$.Se $a_1+a_2+a_3+...+a_n \succ b_1+b_2+b_3+...+b_n$, então, vale a desigualdade:

$$\sum_{sym} x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}...x_n^{a_n} \geq \sum_{sym} x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3}...x_n^{b_n}$$

Desigualdade de Young:

Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então vale:

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

Desigualdade de Erdös-Mordell:

Considere um triângulo ABC e um ponto P do mesmo plano. Sejam P_A, P_B, P_C as projeções ortogonais de P nos lados BC, CA, AB respectivamente. Vale então a desigualdade:

$$AP + BP + CP \geq 2(PP_A + PP_B + PP_C)$$

3 Os axiomas de Peano, o princípio da indução, e algumas relações lógicas úteis em provas por indução

Contraposição ou Modus Tollens

$$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$$

Equivalência entre o condicional

$$\neg(P \to Q) = P \wedge \neg Q$$

Veracidade

i Se uma sentença é verdadeira, então sua contra-positiva é verdadeira (e vice-versa).

ii Se uma sentença é falsa, então sua contra-positiva é falsa (e vice-versa).

iii Se a inversa de uma sentença é verdadeira, então sua recíproca é verdadeira (e vice-versa).

iv Se a inversa de uma sentença é falsa, então sua recíproca é falsa (e vice-versa).

v Se a negação de uma sentença é falsa, então a sentença é verdadeira (e vice-versa).

vi Se uma sentença (ou sua contra-positiva) e a inversa (ou sua recíproca) são ambas verdadeiras ou ambas falsas, a mesma pode ser chamada de bicondicional.

Axiomas de Peano:

i Existe uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, que denominamos sucessor de $\mathbb{N}$

ii A função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva.

iii Existe um único elemento 1 no conjunto $\mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n), \forall n \in \mathbb{N}$

iv Se um subconjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in \mathbb{N}$ e $s(\mathbb{X}) \subset \mathbb{X}$ então $\mathbb{X} = \mathbb{N}$

Princípio da Indução:

Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se P vale para 1 e se, além disso, o fato de o número natural n possuir a propriedade P implicar que seu sucessor s(n) também possua essa propriedade, então todos os números naturais possuem a propriedade P.

4 Problemas Interessantes

1. Deduza a fórmula de Heron, dada por:

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

Em que S é o semiperímetro, a,b e c os lados do triângulo e A sua área.

Solução:

Vamos transformar em produto a expressão abaixo:

$$senx + seny + senz - sen(x+y+z)$$

Veja como podemos fazer isso:

$$senx + seny + senz - sen(x+y+z) =$$

$$2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - 2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x+y+2z}{2}\right) =$$

$$2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - cos\left(\frac{x+y+2z}{2}\right)\right) =$$

$$4sen\left(\frac{x+y}{2}\right)sen\left(\frac{x+z}{2}\right)sen\left(\frac{y+z}{2}\right)$$

De onde concluímos que sempre vale:

$$senx+seny+senz-sen(x+y+z) = 4sen\left(\frac{x+y}{2}\right)sen\left(\frac{x+z}{2}\right)sen\left(\frac{y+z}{2}\right)$$

Sejam a,b e c lados de um triângulo e alpha,beta e gamma os ângulos opostos aos lados a,b e c, respectivamente.Fazendo x=alpha,y=beta e z=gamma na fórmula acima, teremos:

$$sen\alpha+sen\beta+sen\gamma-sen(\alpha+\beta+\gamma) = 4sen\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

Observando que $sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = cos\frac{\gamma}{2}$.A expressão acima é equivalente a:

$$sen\alpha + sen\beta + sen\gamma = 4cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$$

Colocando em evidência $sen\gamma$ no lado esquerdo, teremos:

$$sen\gamma\left(\frac{sen\alpha}{sen\gamma}+\frac{sen\beta}{sen\gamma}+1\right)=4cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2} \tag{1}$$

Pela Lei dos senos, teremos:

$$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}\Rightarrow\frac{sen\alpha}{sen\gamma}=\frac{a}{c},\frac{sen\beta}{sen\gamma}=\frac{b}{c}$$

Substituindo no lado esquerdo de (1), teremos:

$$sen\gamma\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1\right)=4cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$$

$$sen\gamma\left(\frac{a+b+c}{c}\right)=4cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2} \tag{2}$$

Seja $S=\dfrac{a+b+c}{2}$, o semiperímetro, então, pela lei dos cossenos e usando que $cos2x=2cos^2x-1$ para todo $x\in\mathbb{R}$, temos que:

$$a^2=b^2+c^2-2bccos\alpha\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\left(2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1\right)\Leftrightarrow cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{4bc}=$$
$$\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}=\frac{1}{bc}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2a}{2}\right)=$$
$$\frac{1}{bc}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\Leftrightarrow cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{bc}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)}\Leftrightarrow cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}}$$

Por simetria, concluímos para os outros ângulos:

$$cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}};$$

$$cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{S(S-b)}{ac}};$$

$$cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{S(S-c)}{ab}};$$

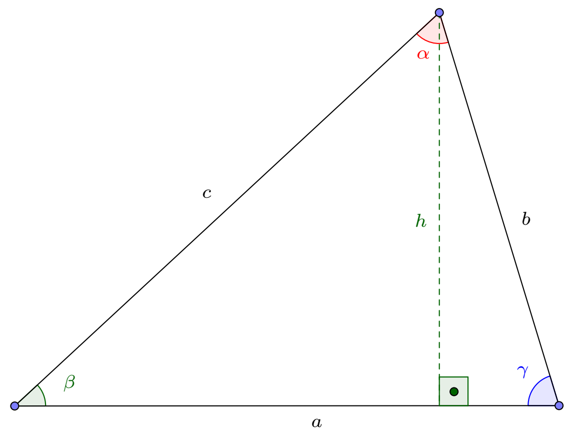
Substituindo as relações acima em (2), teremos:

$$sen\gamma\left(\frac{a+b+c}{c}\right)=4\frac{S}{abc}\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

Usando que $S=\dfrac{a+b+c}{2}$, obtemos:

$$\frac{absen\gamma}{2}=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

Observe o triângulo abaixo:



Note que desenhamos os lados a,b e c opostos a alpha, beta e gamma respectivamente, isto é muito importante pois deduzimos as fórmulas anteriores partindo desse princípio.A área desse triângulo é dada por (base)x(altura)/2, basta observar que no triângulo dado temos:

$$sen\gamma = \frac{h}{b} \Rightarrow h = bsen\gamma$$

Além disso, sabemos que sua base é a, daí segue o resultado desejado.

2. ("Números Complexos e Binomiais"-Ulysses Sodré)Se $n, p \in \mathbb{Z}$, sendo $n, p \geq 0$, demonstrar que:

$$\binom{0}{p} + \binom{1}{p} + \binom{2}{p} + \binom{3}{p} + ... + \binom{n}{p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Solução 1:

Se $n, p \in \mathbb{Z}$, sendo $n, p \geq 0$, vamos provar que:

$$\binom{0}{p} + \binom{1}{p} + \binom{2}{p} + \binom{3}{p} + ... + \binom{n}{p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Convenciona-se que $\binom{k}{p} = 0$ para $p > k$. Nosso objetivo é provar que $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$, vamos quebrar em dois casos, vamos provar para o caso em que p é ímpar e para o caso em que p é par, vamos começar com o caso em que p é ímpar, para isto, vamos definir uma função especial, e estudar suas propriedades.Seja $f_n(\phi)$ uma função tal que $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada pela relação abaixo:

$$f_n(\phi) = -cot(\phi) + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{sen(k\phi)}{cos^k(\phi)} \tag{3}$$

Veja o que podemos dizer dessa soma, para isto, considere que:

$$\frac{cos((k+1)\phi)}{cos^k(\phi)} - \frac{cos(k\phi)}{cos^{k-1}(\phi)} = \frac{cos((k+1)\phi) - cos(k\phi)cos(\phi)}{cos^k(\phi)} = \frac{(cos(k\phi)cos(\phi) - sen(k\phi)sen(\phi)) - cos(k\phi)cos(\phi)}{cos^k(\phi)} = -\frac{sen(\phi)sen(k\phi)}{cos^k(\phi)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{cos((k+1)\phi)}{cos^k(\phi)} - \frac{cos(k\phi)}{cos^{k-1}(\phi)} = -\frac{sen(\phi)sen(k\phi)}{cos^k(\phi)} \Rightarrow \sum_{k=1}^{2n-1}\left(\frac{cos((k+1)\phi)}{cos^k(\phi)} - \frac{cos(k\phi)}{cos^{k-1}(\phi)}\right) = -\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{sen(\phi)sen(k\phi)}{cos^k(\phi)} \Rightarrow \frac{cos(2n\phi)}{cos^{2n-1}(\phi)} - cos(\phi) = -\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{sen(\phi)sen(k\phi)}{cos^k(\phi)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{sen(\phi)}\left(\frac{cos(2n\phi)}{cos^{2n-1}(\phi)} - cos(\phi)\right) = -\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{sen(k\phi)}{cos^k(\phi)} \Rightarrow$$

$$-\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{sen(k\phi)}{cos^k(\phi)} = \frac{cos(2n\phi)}{sen(\phi)cos^{2n-1}(\phi)} - cot(\phi) \Rightarrow cot(\phi) - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{sen(k\phi)}{cos^k(\phi)} = \frac{cos(2n\phi)}{sen(\phi)cos^{2n-1}(\phi)}$$

De onde concluímos a primeira propriedade de $f_n(\phi)$:

$$f_n(\phi) = -\frac{cos(2n\phi)}{sen(\phi)cos^{2n-1}(\phi)} \tag{4}$$

Partindo de (3) veja o que podemos fazer:

$$f_n(\phi) = -cot(\phi) + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{sen(k\phi)}{cos^k(\phi)} = -cot(\phi) + \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{cis(k\phi) - cis(-k\phi)}{cos^k(\phi)} =$$
$$- cot(\phi) + \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(cos(\phi) + isen(\phi))^k - (cos(\phi) - isen(\phi))^k}{cos^k(\phi)} =$$
$$- cot(\phi) + \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2n-1} ((1 + itan(\phi))^k - (1 - itan(\phi))^k) =$$
$$- cot(\phi) + \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2n-1} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (itan(\phi))^j - \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-itan(\phi))^j \right) = -cot(\phi) +$$
$$\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2n-1}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (itan(\phi))^j - \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2n-1}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-itan(\phi))^j =$$

$$-cot(\phi) + \frac{1}{i}\left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + ... + \binom{2n-1}{1}\right) i.tan(\phi) + \frac{1}{i}\left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + ... + \binom{2n-1}{3}\right) i^3tan^3(\phi)$$
$$+ - ... + \frac{1}{i}\left(\binom{2j-1}{2j-1} + \binom{2j}{2j-1} + ... + \binom{2n-1}{2j-1}\right) (i)^{2j-1}(tan(\phi))^{2j-1} + -... =$$

$$-cot(\phi) + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + ... + \binom{2n-1}{1}\right) tan(\phi) + \left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + ... + \binom{2n-1}{3}\right) i^2tan^3(\phi)$$
$$+... + \left(\binom{2j-1}{2j-1} + \binom{2j}{2j-1} + ... + \binom{2n-1}{2j-1}\right) (i)^{2(j-1)}(tan(\phi))^{2j-1} + ... =$$

$$-cot(\phi) + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + ... + \binom{2n-1}{1}\right) tan(\phi) - \left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + ... + \binom{2n-1}{3}\right) tan^3(\phi)$$
$$+ - ... + \left(\binom{2j-1}{2j-1} + \binom{2j}{2j-1} + ... + \binom{2n-1}{2j-1}\right) (-1)^{j+1}(tan(\phi))^{2j-1} + -... =$$

$$cot(\phi)\left[-1 + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + ... + \binom{2n-1}{1}\right) tan^2(\phi) - \left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + ... + \binom{2n-1}{3}\right) tan^4(\phi)\right.$$
$$\left. + - ... + \left(\binom{2j-1}{2j-1} + \binom{2j}{2j-1} + ... + \binom{2n-1}{2j-1}\right) (-1)^{j+1}(tan(\phi))^{2j} + -...\right] =$$

$$cot(\phi)\left[-\binom{0}{0} + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + ... + \binom{2n-1}{1}\right) tan^2(\phi) - \left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + ... + \binom{2n-1}{3}\right) tan^4(\phi)\right.$$
$$\left. + - ... + \left(\binom{2j-1}{2j-1} + \binom{2j}{2j-1} + ... + \binom{2n-1}{2j-1}\right) (-1)^{j+1}(tan(\phi))^{2j} + -...\right]$$

De onde concluímos que:

$$f_n(\phi) =$$
$$cot(\phi)\left[-\binom{0}{0} + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + ... + \binom{2n-1}{1}\right)tan^2(\phi) - \left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + ... + \binom{2n-1}{3}\right)tan^4(\phi)\right.$$
$$\left. + - ... + \left(\binom{2j-1}{2j-1} + \binom{2j}{2j-1} + ... + \binom{2n-1}{2j-1}\right)(-1)^{j+1}(tan(\phi))^{2j} + -...\right] \quad (5)$$

Comparando (4) e (5), concluímos que:

$$-\frac{cos(2n\phi)}{sen(\phi)cos^{2n-1}(\phi)} =$$
$$cot(\phi)\left[-\binom{0}{0} + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + ... + \binom{2n-1}{1}\right)tan^2(\phi) - \left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + ... + \binom{2n-1}{3}\right)tan^4(\phi)\right.$$
$$\left. + - ... + \left(\binom{2j-1}{2j-1} + \binom{2j}{2j-1} + ... + \binom{2n-1}{2j-1}\right)(-1)^{j+1}(tan(\phi))^{2j} + -...\right]$$

Multiplicando os dois lados da igualdade por $-tan(\phi)$, teremos:

$$\frac{cos(2n\phi)}{cos^{2n}(\phi)} =$$
$$\binom{0}{0} - \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + ... + \binom{2n-1}{1}\right)tan^2(\phi) + \left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + ... + \binom{2n-1}{3}\right)tan^4(\phi)$$
$$+ - ... + \left(\binom{2j-1}{2j-1} + \binom{2j}{2j-1} + ... + \binom{2n-1}{2j-1}\right)(-1)^{j}(tan(\phi))^{2j} + -... \quad (6)$$

Vamos guardar a igualdade acima, e encontrar novas relações, veja:

$$cos(2n\phi) = \frac{cis(2n\phi) + cis(-2n\phi)}{2} = \frac{(cos(\phi) + isen(\phi))^{2n} + (cos(\phi) - isen(\phi))^{2n}}{2} =$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}cos^{2n-k}(\phi)i^k sen^k(\phi) + \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k cos^{2n-k}(\phi)i^k sen^k(\phi)\right) =$$
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}cos^{2n-2k}(\phi)i^{2k}sen^{2k}(\phi) \Rightarrow cos(2n\phi) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}cos^{2n-2k}(\phi)i^{2k}sen^{2k}(\phi) =$$
$$cos(2n\phi) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(-1)^k cos^{2n-2k}(\phi)sen^{2k}(\phi)$$

Dividindo ambos os lados da igualdade acima por $cos^{2n}(\phi)$, chegamos a:

$$\frac{cos(2n\phi)}{cos^{2n}(\phi)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}tan^{2k}(\phi) \quad (7)$$

Comparando (6) e (7), teremos:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}tan^{2k}(\phi) =$$
$$\binom{0}{0}-\left(\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+...+\binom{2n-1}{1}\right)tan^2(\phi)+\left(\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+...+\binom{2n-1}{3}\right)tan^4(\phi)$$
$$+-...+\left(\binom{2j-1}{2j-1}+\binom{2j}{2j-1}+...+\binom{2n-1}{2j-1}\right)(-1)^j(tan(\phi))^{2j}+-...$$

Observe que como a tangente percorre todos os reais, podemos substituir a tangente por uma variável que representa um número real.Substituindo a tangente por x, veja:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}x^{2k} =$$
$$\binom{0}{0}-\left(\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+...+\binom{2n-1}{1}\right)x^2+\left(\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+...+\binom{2n-1}{3}\right)x^4$$
$$+-...+\left(\binom{2j-1}{2j-1}+\binom{2j}{2j-1}+...+\binom{2n-1}{2j-1}\right)(-1)^jx^{2j}+-... \tag{8}$$

Observe que obtivemos dois polinômios que devem satisfazer uma igualdade, mas pelo teorema da identidade polinomial, dois polinômios são iguais se os coeficientes dos termos de graus correspondentes são iguais, portanto, igualando os termos de mesmo grau se obtém o resultado para p ímpar.Observe que o que provamos acima é que: $\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{k}{2j-1}=\binom{2n}{2j}$.Isto é, a soma em k, com k variando de zero até um número ímpar, para provar a soma até um número par, devemos subtrair em (8) o polinômio $\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k\binom{2n-1}{2k-1}x^{2k}$, de onde obteremos:

$$1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\binom{2n}{2k}-\binom{2n-1}{2k-1}\right)x^{2k} =$$
$$\binom{0}{0}-\left(\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+...+\binom{2n-2}{1}\right)x^2+\left(\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+...+\binom{2n-2}{3}\right)x^4$$
$$+-...+\left(\binom{2j-1}{2j-1}+\binom{2j}{2j-1}+...+\binom{2n-2}{2j-1}\right)(-1)^jx^{2j}+-... \tag{9}$$

Usando a relação de Stifel em (9), que nos diz que: $\binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1} \Rightarrow \binom{n+1}{p+1} = \binom{n+2}{p+1} - \binom{n+1}{p}$
Substituindo o resultado acima em (9), novamente, por congruência polinomial, teremos o resultado requerido até um número par.
Agora vamos provar o caso par. Vamos definir uma função $g_n(\phi)$ tal que $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e:

$$g_n(\phi) = 1 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{cos(k\phi)}{cos^k(\phi)} \tag{10}$$

Veja o que podemos dizer dessa função, para tanto, tome a diferença:

$$\frac{sen((k+1)\phi)}{cos^k(\phi)} - \frac{sen(k\phi)}{cos^{k-1}(\phi)} = \frac{sen((k+1)\phi) - sen(k\phi)cos(\phi)}{cos^k(\phi)} = \frac{sen(k\phi)cos(\phi) + cos(k\phi)sen(\phi) - sen(k\phi)cos(\phi)}{cos^k(\phi)} = \frac{cos(k\phi)sen(\phi)}{cos^k(\phi)} \Rightarrow \frac{sen((k+1)\phi)}{cos^k(\phi)} - \frac{sen(k\phi)}{cos^{k-1}(\phi)} = \frac{cos(k\phi)sen(\phi)}{cos^k(\phi)} \Rightarrow \sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{sen((k+1)\phi)}{cos^k(\phi)} - \frac{sen(k\phi)}{cos^{k-1}(\phi)}\right) = \sum_{k=1}^{2n}\frac{cos(k\phi)sen(\phi)}{cos^k(\phi)} \Rightarrow \frac{sen((2n+1)\phi)}{cos^{2n}(\phi)} - sen(\phi) = \sum_{k=1}^{2n}\frac{cos(k\phi)sen(\phi)}{cos^k(\phi)} \Rightarrow \frac{sen((2n+1)\phi)}{cos^{2n}(\phi)} = sen(\phi) + \sum_{k=1}^{2n}\frac{cos(k\phi)sen(\phi)}{cos^k(\phi)} \Rightarrow \frac{sen((2n+1)\phi)}{sen(\phi)cos^{2n}(\phi)} = 1 + \sum_{k=1}^{2n}\frac{cos(k\phi)}{cos^k(\phi)}$$

Comparando a igualdade acima com (10), concluímos a igualdade:

$$g_n(\phi) = \frac{sen((2n+1)\phi)}{sen(\phi)cos^{2n}(\phi)} \tag{11}$$

Vamos memorizar a igualdade acima e encontrar novas relações para a função $g_n(\phi)$, veja o que podemos fazer:

$$sen((2n+1)\phi) = \frac{cis((2n+1)\phi) - cis(-(2n+1)\phi)}{2i} = \frac{(cos(\phi)+isen(\phi))^{2n+1} - (cos(\phi)-isen(\phi))^{2n+1}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}cos^{2n+1-k}(\phi)i^k sen^k(\phi) - \sum_{k=1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^k cos^{2n+1-k}(\phi)i^k sen^k(\phi)\right) = \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}cos^{2n+1-(2k+1)}(\phi)i^{2k+1}sen^{2k+1}(\phi) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}cos^{2n-2k}(\phi)i^{2k}sen^{2k+1}(\phi) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k cos^{2n-2k}(\phi)sen^{2k+1}(\phi) \Rightarrow sen((2n+1)\phi) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k cos^{2n-2k}(\phi)sen^{2k+1}(\phi)$$

$$\Rightarrow \frac{sen((2n+1)\phi)}{sen(\phi)cos^{2n}(\phi)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k tan^{2k}(\phi)$$

Comparando a igualdade acima com (11), teremos que:

$$g_n(\phi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k tan^{2k}(\phi) \tag{12}$$

Vamos memorizar a igualdade acima, e desenvolver (6) de modo apropriado, veja como podemos fazer isso:

$$g_n(\phi) = 1 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{cos(k\phi)}{cos^k(\phi)} =$$
$$= 1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \frac{cis(k\phi)+cis(-k\phi)}{cos^k(\phi)} = 1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \frac{(cos(\phi)+isen(\phi))^k+(cos(\phi)-isen(\phi))^k}{cos^k(\phi)}$$
$$= 1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}((1+itan(\phi))^k+(1-itan(\phi))^k) = 1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(itan(\phi))^j + \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j(itan(\phi))^j\right) =$$
$$1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(itan(\phi))^j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j(itan(\phi))^j =$$

$$2n+1+\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+...+\binom{2n}{2}\right)i^2.tan(\phi)+\left(\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+...+\binom{2n}{4}\right)i^4tan^4(\phi)$$
$$+-...+\left(\binom{2j}{2j}+\binom{2j+1}{2j}+...+\binom{2n}{2j}\right)(i)^{2j}(tan(\phi))^{2j}+-...=$$

$$2n+1-\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+...+\binom{2n}{2}\right)tan(\phi)+\left(\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+...+\binom{2n}{4}\right)i^4tan^4(\phi)$$
$$+-...+\left(\binom{2j}{2j}+\binom{2j+1}{2j}+...+\binom{2n}{2j}\right)(-1)^j(tan(\phi))^{2j}+-...=$$

De onde concluímos que sempre vale:

$$g_n(\phi) =$$
$$2n+1-\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+...+\binom{2n}{2}\right)tan(\phi)+\left(\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+...+\binom{2n}{4}\right)i^4tan^4(\phi)$$
$$+-...+\left(\binom{2j}{2j}+\binom{2j+1}{2j}+...+\binom{2n}{2j}\right)(-1)^j(tan(\phi))^{2j}+-...$$

Comparando a igualdade acima com (12), teremos que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k tan^{2k}(\phi) =$$
$$2n+1-\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+...+\binom{2n}{2}\right) tan(\phi)+\left(\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+...+\binom{2n}{4}\right) i^4 tan^4(\phi)$$
$$+-...+\left(\binom{2j}{2j}+\binom{2j+1}{2j}+...+\binom{2n}{2j}\right)(-1)^j (tan(\phi))^{2j}+-... \tag{13}$$

Como a tangente percorre todos os reais, a igualdade acima deve ser válida para todos os reais, fazendo $x = tan(\phi)$, teremos uma igualdade de polinômios em x, e como dois polinômios são iguais se os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais, daí chega-se a conclusão que se deseja.Observe que o que provamos acima é que: $\sum_{k=0}^{2n} \binom{k}{2j} = \binom{2n+1}{2j+1}$.Isto é, a soma em k, com k variando de zero até um número par, para provar a soma até um número ímpar, devemos subtrair em (13) um polinômio conveniente, usar a relação de Stifel, como foi usada anteriormente e concluir a solução do problema pedido.

Solução 2: Use somente a relação de Stifel, a soma é telescópica.

3. ("103 Trigonometry Problems from the training of the USA IMO Team"- Titu Andreescu) Let ABC be a triangle. Prove that

$$sen^2\frac{A}{2}+sen^2\frac{B}{2}+sen^2\frac{C}{2}+2sen\frac{A}{2}sen\frac{B}{2}sen\frac{C}{2}=1$$

Conversely, prove that if x, y, z are positive real numbers such that:

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$$

then there is a triangle ABC such that $x=sen\frac{A}{2}, y=sen\frac{B}{2}, z=sen\frac{C}{2}$

Solução:

Vamos provar primeiro a primeira parte do enunciado, para isto considere que se alpha, beta e gamma são ângulos de um triângulo, então vale :

$$sec\frac{\alpha}{2}sec\frac{\beta}{2}sec\frac{\gamma}{2}cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$sec\frac{\alpha}{2}sec\frac{\beta}{2}sec\frac{\gamma}{2}\left(cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\frac{\gamma}{2}-sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\frac{\gamma}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$sec\frac{\alpha}{2}sec\frac{\beta}{2}sec\frac{\gamma}{2}\left(\left(cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}-sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}\right)cos\frac{\gamma}{2}-\left(sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}+cos\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}\right)sen\frac{\gamma}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$sec\frac{\alpha}{2}sec\frac{\beta}{2}sec\frac{\gamma}{2}\left(cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}-sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}-sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\gamma}{2}cos\frac{\beta}{2}-sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}cos\frac{\alpha}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$1-\left(tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\beta}{2}+tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\gamma}{2}+tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)tan\left(\frac{\beta}{2}\right)+tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)+tan\left(\frac{\beta}{2}\right)tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)=1 \qquad (14)$$

Sendo assim, se alpha,beta e gamma são ângulos de um triângulo então, a identidade para tangentes vale.Nós vamos usar este fato para provar que se alpha e beta e gamma são ângulos de um triângulo, então a identidade de senos acima vale.A forma que faremos isso é provando que a identidade para tangentes implica na identidade para senos.

Podemos usar o fato de alpha, beta, gamma serem ângulos de um triângulo a nosso favor, veja:

$$\frac{1}{1-tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)}-1=\frac{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)-sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\gamma}{2}\right)}-1=$$

$$\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}=\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}=\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{sen\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}=\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{sen\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

Por simetria, podemos ver:

$$\frac{1}{1-tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)}-1=\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{sen\left(\frac{\beta}{2}\right)} \tag{15}$$

$$\frac{1}{1-tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}-1=\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\beta}{2}\right)}{sen\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \tag{16}$$

$$\frac{1}{1-tan\left(\frac{\beta}{2}\right)tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)}-1=\frac{sen\left(\frac{\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{17}$$

É possível ver, pelas relações acima que:

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{1-tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)}-1\right)\left(\frac{1}{1-tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}-1\right)} \tag{18}$$

$$sen\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{1-tan\left(\frac{\beta}{2}\right)tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)}-1\right)\left(\frac{1}{1-tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}-1\right)} \tag{19}$$

$$sen\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{1-tan\left(\frac{\beta}{2}\right)tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)}-1\right)\left(\frac{1}{1-tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)}-1\right)} \tag{20}$$

Partindo de (14), veja o que podemos fazer.Vamos usar u,v e w para representar as tangentes de alpha, beta e gamma, isto é, $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=u, tan\left(\frac{\beta}{2}\right)=v, tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)=w$:

$$uv+vw+uw=1$$

Multiplicando a igualdade acima por -1 e somando 3 nos dois lados da igualdade resultante, teremos:

$$(1-uv)+(1-vw)+(1-uw)=2$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por (1-uv)(1-uw)(1-vw), teremos:

$$\left(\frac{1}{1-uw}\right)\left(\frac{1}{1-uv}\right)+\left(\frac{1}{1-vw}\right)\left(\frac{1}{1-uv}\right)+\left(\frac{1}{1-uw}\right)\left(\frac{1}{1-vw}\right)=2\left(\frac{1}{1-uw}\right)\left(\frac{1}{1-uv}\right)\left(\frac{1}{1-vw}\right)$$

Fazendo a substituição $x=\dfrac{1}{1-vw}, y=\dfrac{1}{1-uw}, z=\dfrac{1}{1-uv}$, nossa expressão fica na forma:

$$xy+xz+yz=2xyz \tag{21}$$

Ao multiplicar a igualdade acima por -1, depois somar $1+2xyz$ nos dois lados da igualdade, e depois somar e subtrair $xy+xz+yz+2x+2y+2z$ no lado esquerdo da igualdade resultante, e arranjar os termos convenientemente, não é difícil ver que a igualdade (21) é equivalente a expressão abaixo:

$(xy-x-y+1)+(yz-z-y+1)+(xz-z-x+1)+2xyz-2xy-2xz-2yz+2x+2y+2z-2=1 \Leftrightarrow$

$(-x(-y+1)-y+1)+(-y(-z+1)-z+1)+(-z(-x+1)-x+1)+2y(xz-x)-2(xz-x)-2z(y-1)+2(y-1)=1 \Leftrightarrow$

$(1-x)(1-y)+(1-y)(1-z)+(1-x)(1-z)+2(xz-x)(y-1)-2z(y-1)+2(y-1)=1 \Leftrightarrow$

$(1-x)(1-y)+(1-y)(1-z)+(1-x)(1-z)+2(y-1)((xz-x)-z+1)=1 \Leftrightarrow$

$(1-x)(1-y)+(1-y)(1-z)+(1-x)(1-z)+2(y-1)(-x(1-z)-z+1)=1 \Leftrightarrow$

$(1-x)(1-y)+(1-y)(1-z)+(1-x)(1-z)+2(y-1)(1-z)(1-x)=1 \Leftrightarrow$

$(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(x-1)(z-1)+2(y-1)(z-1)(x-1)=1$

Desfazendo a substituição, teremos:

$$\left(\frac{1}{1-vw}-1\right)\left(\frac{1}{1-uw}-1\right)+\left(\frac{1}{1-vw}-1\right)\left(\frac{1}{1-uv}-1\right)+\left(\frac{1}{1-uw}-1\right)\left(\frac{1}{1-uv}-1\right)+2\left(\frac{1}{1-uv}-1\right)\left(\frac{1}{1-uw}-1\right)\left(\frac{1}{1-vw}-1\right)=1$$

Como u,v e w nada mais são do que as tangentes de alpha, beta e gamma, se efetuarmos as substituições (15),(16) e (17), finalmente teremos:

$$sen^2\frac{\alpha}{2}+sen^2\frac{\beta}{2}+sen^2\frac{\gamma}{2}+2sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}=1$$

O que a segunda parte nos diz é que se $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ então podemos substituir x,y e z por senos de alpha/2, beta/2 e gamma/2, sendo alpha, beta e gamma ângulos de um triângulo.Para a segunda parte o leitor pode ver a demonstração no artigo de Daniel Campos Salas e Vardan Verdiyan "Simple trigonometric substitutions with broad results", está logo no início do artigo.Em todo caso, vou deixar aqui uma segunda demonstração.Faça a substituição:

$$u=x\sqrt{\frac{x+yz}{(y+xz)(z+xy)}};v=y\sqrt{\frac{y+xz}{(x+yz)(z+xy)}};w=z\sqrt{\frac{z+xy}{(x+yz)(y+xz)}}$$

De fato, podemos fazer essa substituição, pois u,v e w são variáveis que não existem no enunciado, e portanto não há restrição de valores que podem assumir, em outras palavras, u,v,w podem assumir qualquer valor que desejarmos.E ainda, x,y e z são reais positivos e uma composição de números reais positivos também é um número real.Multiplicando essas igualdades duas a duas, teremos:

$$vw=\frac{yz}{x+yz};uv=\frac{xy}{z+xy};uw=\frac{xz}{y+xz};$$

Tome a primeira das igualdades acima e observe que:

$$vw=\frac{yz}{x+yz}\Rightarrow vw=\frac{\frac{yz}{x}}{\frac{x+yz}{x}}\Rightarrow vw=\frac{\frac{yz}{x}}{1+\frac{yz}{x}}\Rightarrow vw=\frac{\left(1+\frac{yz}{x}\right)-1}{1+\frac{yz}{x}}$$
$$\Rightarrow vw=1-\frac{1}{1+\frac{yz}{x}}\Rightarrow\frac{1}{1+\frac{yz}{x}}=1-vw\Rightarrow\frac{1}{1-vw}=1+\frac{yz}{x}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{yz}{x}=\frac{1}{1-vw}-1;$$

Por simetria, chegamos as igualdades:

$$\frac{yz}{x}=\frac{1}{1-vw}-1;\frac{xz}{y}=\frac{1}{1-uw}-1;\frac{xy}{z}=\frac{1}{1-uv}-1;$$

Multiplicando essas igualdades duas a duas, teremos:

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{1-uv} - 1\right)\left(\frac{1}{1-uw} - 1\right)} \tag{A}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{1-uv} - 1\right)\left(\frac{1}{1-vw} - 1\right)}; \tag{B}$$

$$z = \sqrt{\left(\frac{1}{1-uw} - 1\right)\left(\frac{1}{1-vw} - 1\right)}; \tag{C}$$

Observe que uma implicação lógica dessa substituição é:

$$x^2+y^2+z^2+2xyz = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{1-vw} - 1\right)\left(\frac{1}{1-uw} - 1\right)+\left(\frac{1}{1-vw} - 1\right)\left(\frac{1}{1-uv} - 1\right)+ \left(\frac{1}{1-uw} - 1\right)\left(\frac{1}{1-uv} - 1\right)+2\left(\frac{1}{1-uv} - 1\right)\left(\frac{1}{1-uw} - 1\right)\left(\frac{1}{1-vw} - 1\right) = 1$$

Já sabemos que essa expressão é equivalente a:

$$uv + vw + uw = 1$$

Fazendo a substituição por tangentes[1], ou seja, fazendo $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = u, tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = v, w = \left(\frac{\gamma}{2}\right)$, chegamos a:

$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) + tan\left(\frac{\beta}{2}\right)tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1$$

Sabemos que essa expressão implica que:

$$sec\frac{\alpha}{2}sec\frac{\beta}{2}sec\frac{\gamma}{2}cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right) = 0$$

Pelo resultado acima alpha, beta e gamma devem ser ângulos(ao supor que α, β e γ estão no intervalo $(0,\pi)$[2]) de um triângulo.Como alpha, beta e gamma são ângulos de um triângulo, o resultado segue naturalmente substituindo (18), (19) e (20) em (A),(B) e (C) .

[1]Observe que a tangente é bijetora no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, e portanto, podemos fazer essa substituição.

[2]De fato, a tangente percorre todos os reais positivos no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, isso implica que existe um ângulo neste intervalo correspondente a qualquer valor numérico positivo.

4. ("103 Problems From the Training USA IMO Team"-Titu Andreescu)Let a,b , c nonnegative real numbers such that:

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$$

Prove that :

$$0 \leq ab + bc + ac - abc \leq 2$$

Solução 1:
Vamos provar primeiro o lado esquerdo, que é mais fácil:

$$0 \leq ab + bc + ac - abc \tag{22}$$

O enunciado nos diz que a,b e c não são negativos, mas não diz nada sobre o fato de serem iguais a zero.Suponha então que apenas uma das variáveis seja igual a zero, por exemplo a=0. Então teremos

$$ab + bc + ac - abc = bc > 0$$

O que é verdadeiro pois b e c não podem ser negativos e supomos que somente a é igual a zero. Suponha, agora que tenhamos duas variáveis iguais a zero, então teremos

$$ab + bc + ac - abc = 0$$

É o caso em que ocorre a igualdade.Agora, não podemos supor que a,b e c sejam todos iguais a zero, pois temos uma igualdade a cumprir, a saber $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$, portanto a,b e c não podem ser todos iguais a zero.Vamos analisar agora o caso $a, b, c > 0$ .Suponha, por absurdo que

$$ab + bc + ac - abc < 0$$

Isto implica que

$$ab + bc + ac < abc$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade por abc, teremos:

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} < 1$$

Mas para que a desigualdade acima seja verdadeira, deve ocorrer, no mínimo, que $a, b, c > 1$. Mas se $a, b, c > 1$ então $a^2 + b^2 + c^2 + abc > 4$, o que contradiz a condição para que a desigualdade seja verdadeira.Agora, vamos provar o lado direito, isto é:

$$ab + bc + ac - abc \leq 2 \tag{23}$$

A ideia por trás da solução é efetuar uma substituição trigonométrica e fazer a condição , que torna a desigualdade verdadeira, recair em uma identidade trigonométrica válida para ângulos de um triângulo.Veja que podemos fazer isso usando a propriedade que as funções seno, cosseno, tangente ou cotangente possuem, de serem bijetoras em intervalos previamente definidos.Vamos reescrever a condição de modo a tornar isto óbvio.Veja:

$$a^2+b^2+c^2+abc=4 \Longrightarrow \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}+\frac{abc}{4}=1 \Longrightarrow \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}+\frac{2abc}{8}=1 \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2+2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)=1$$

Fazendo $a=2sen\frac{\alpha}{2}$,$b=2sen\frac{\beta}{2}$,$c=2sen\frac{\gamma}{2}$, recaímos na identidade trigonométrica:

$$sen^2\frac{\alpha}{2}+sen^2\frac{\beta}{2}+sen^2\frac{\gamma}{2}+2sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}=1$$

Esta identidade trigonométrica é válida quando α,β,γ são ângulos de um triângulo, já provamos isso na questão 3.Por outro lado, efetuando essa substituição em (23), nossa desigualdade fica reescrita da seguinte forma:

$$4sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}+4sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}+4sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\gamma}{2}-8sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}\leq 2$$

$$2sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}+2sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}+2sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\gamma}{2}-4sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}\leq 1$$

$$2sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}+2sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}+2sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\gamma}{2}\leq 1+4sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}$$

$$2sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}+2sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}+2sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\gamma}{2}\leq cos\alpha+cos\beta+cos\gamma$$

$$2sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}+2sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}+2sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\gamma}{2}\leq$$
$$cos^2\frac{\alpha}{2}-sen^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\beta}{2}-sen^2\frac{\beta}{2}+cos^2\frac{\gamma}{2}-sen^2\frac{\gamma}{2}$$

$$2sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}+2sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}+2sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\gamma}{2}+sen^2\frac{\alpha}{2}+sen^2\frac{\beta}{2}+sen^2\frac{\gamma}{2}\leq$$
$$cos^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\beta}{2}+cos^2\frac{\gamma}{2}$$

$$\left(sen\frac{\alpha}{2}+sen\frac{\beta}{2}+sen\frac{\gamma}{2}\right)^2\leq cos^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\beta}{2}+cos^2\frac{\gamma}{2}$$

$$cos^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\beta}{2}+cos^2\frac{\gamma}{2}\geq\left(sen\frac{\alpha}{2}+sen\frac{\beta}{2}+sen\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

A desigualdade (23) é equivalente a desigualdade acima.Agora, nos resta provar a desigualdade acima.Primeiramente, seja S o semiperímetro e a,b e c lados de um triângulo [3], então vale que:

[3]Não confunda as variáveis a,b,c do enunciado com essas variáveis a,b,c, que representam os lados de um triângulo qualquer.

$$sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}; sen\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{ac}}; sen\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{ab}} \tag{24}$$

$$cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}}; cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{S(S-b)}{ac}}; cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{S(S-c)}{ab}} \tag{25}$$

Na página 10 desse PDF, provamos as relações (25).Provemos (24).Pela lei dos cossenos e usando que $cos(2x) = 1 - 2sen^2 x$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\left(1 - 2sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \Leftrightarrow sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4bc} =$$

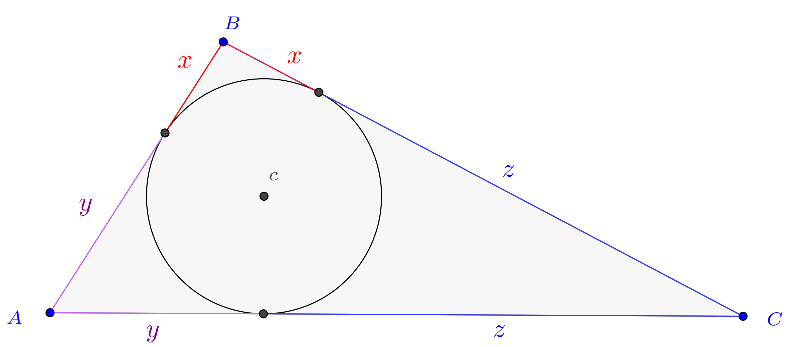
$$\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc} = \frac{1}{bc}\left(\frac{a+b+c-2c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2b}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{bc}\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right) \Leftrightarrow sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{bc}\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)} \Leftrightarrow$$

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$$

Por simetria, conclui-se os outros casos.

Considere um triângulo ABC arbitrário e uma circunferência inscrita nesse triângulo, então, os pontos de tangência da circunferência delimitam retas iguais duas a duas.Observe que esta afirmação está geometricamente fundamentada, uma vez que se duas retas tangenciam uma circunferência e se estas retas se interceptam em um ponto exterior a mesma, então, a distância do ponto de interseção das retas aos pontos de tangência são iguais.Portanto, podemos dividir os lados de um triângulo conforme a figura abaixo:



Logo, nos é lícita a seguinte substituição $a = y + z, b = x + z, c = x + y$.Esta transformação é conhecida como transformação de Ravi e pode ser útil em diversas outras aplicações.Fazendo esta substituição, teremos que:

$$S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{(x+y)+(y+z)+(x+z)}{2} = x+y+z$$

De onde obteremos:
$S-a = x+y+z-(x+y) = z$
$S-b = x+y+z-(y+z) = x$
$S-c = x+y+z-(x+z) = y$

Substituindo em (24) e (25), teremos:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}; sen\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{xz}{(x+y)(y+z)}} sen\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{xy}{(y+z)(x+z)}}; \tag{26}$$

$$cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}; cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(x+y)(y+z)}} cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(y+z)(x+z)}}; \tag{27}$$

Considere a desigualdade de Cauchy-Schwarz em 3 variáveis, fazendo a substituição $a_1 = \sqrt{xy}, a_2 = \sqrt{xz}, a_3 = \sqrt{yz}$ e $b_1 = \sqrt{\frac{1}{(x+z)(y+z)}}, b_2 = \sqrt{\frac{1}{(x+y)(y+z)}}, b_3 = \sqrt{\frac{1}{(x+z)(x+y)}}$ é possível ver que vale a desigualdade abaixo:

Desigualdade A:

$$(xy+xz+yz)\left(\frac{1}{(x+z)(y+z)} + \frac{1}{(x+y)(y+z)} + \frac{1}{(x+z)(x+y)}\right) \geq \left(\sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}} + \sqrt{\frac{xz}{(x+y)(y+z)}} + \sqrt{\frac{yz}{(x+z)(x+y)}}\right)^2$$

Vamos memorizar a desigualdade acima nesta forma.Considere agora que:

$$2(xy+yz+xz)(x+y+z) = 2(xy+yz+xz)(x+y+z) \Leftrightarrow$$

$$(2xy+2yz+2xz)(x+y+z) = (xy+yz+xz)(2x+2y+2z) \Leftrightarrow$$

$$((xz+yz)+(xy+xz)+(xy+yz))(x+y+z) = (xy+yz+xz)((x+y)+(x+z)+(y+z)) \Leftrightarrow$$

$$(z(x+y)+x(y+z)+y(x+z))(x+y+z) = (xy+yz+xz)((x+y)+(x+z)+(y+z))$$

Dividindo ambos os lados dessa igualdade por $(x+y)(x+z)(y+z)$, vem:

$$\left(\frac{z}{(x+z)(y+z)}+\frac{x}{(x+z)(x+y)}+\frac{y}{(x+y)(y+z)}\right)(x+y+z)=$$
$$(xy+xz+yz)\left(\frac{1}{(x+z)(y+z)}+\frac{1}{(x+z)(x+y)}+\frac{1}{(x+y)(y+z)}\right)$$

De onde se conclui a igualdade abaixo:

Igualdade A:

$$\frac{z(x+y+z)}{(x+z)(y+z)}+\frac{x(x+y+z)}{(x+z)(x+y)}+\frac{y(x+y+z)}{(x+y)(y+z)}=$$
$$(xy+xz+yz)\left(\frac{1}{(x+z)(y+z)}+\frac{1}{(x+z)(x+y)}+\frac{1}{(x+y)(y+z)}\right)$$

Substituindo a "Igualdade A" no lado esquerdo da "Desigualdade A", obtemos:

$$\frac{z(x+y+z)}{(x+z)(y+z)}+\frac{x(x+y+z)}{(x+z)(x+y)}+\frac{y(x+y+z)}{(x+y)(y+z)}\geq$$
$$\left(\sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}+\sqrt{\frac{xz}{(x+y)(y+z)}}+\sqrt{\frac{yz}{(x+z)(x+y)}}\right)^2$$

Efetuando a substituição (26) e (27) na desigualdade acima, finalmente chega-se ao resultado:

$$cos^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\beta}{2}+cos^2\frac{\gamma}{2}\geq\left(sen\frac{\alpha}{2}+sen\frac{\beta}{2}+sen\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

Solução 2:

Vou dar uma segunda solução para o lado direito, sem que seja necessário fazer uma substituição trigonométrica.Às vezes o que precisamos em uma questão desse tipo não é nada mais do que criatividade.Faça a substituição:

$$u = a\sqrt{\frac{2a+bc}{(2b+ac)(2c+ab)}}; v = b\sqrt{\frac{2b+ac}{(2a+bc)(2c+ab)}}; w = c\sqrt{\frac{2c+ab}{(2a+bc)(2b+ac)}}$$

De fato, podemos fazer essa substituição, pois u,v e w são variáveis que não existem no enunciado, e portanto não há restrição de valores que podem assumir, em outras palavras, u,v,w podem assumir qualquer valor que desejarmos.E ainda, a,b e c são positivos e uma composição de números reais positivos também é um número real.Multiplicando essas igualdades duas a duas, teremos:

$$vw = \frac{bc}{2a+bc}; uv = \frac{ab}{2c+ab}; uw = \frac{ac}{2b+ac};$$

Tome a primeira das igualdades acima e observe que:

$$vw = \frac{bc}{2a+bc} \Rightarrow vw = \frac{\frac{bc}{2a}}{\frac{2a+bc}{2a}} \Rightarrow vw = \frac{\frac{bc}{2a}}{1+\frac{bc}{2a}} \Rightarrow vw = \frac{\left(1+\frac{bc}{2a}\right)-1}{1+\frac{bc}{2a}}$$
$$\Rightarrow vw = 1 - \frac{1}{1+\frac{bc}{2a}} \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{bc}{2a}} = 1 - vw \Rightarrow \frac{1}{1-vw} = 1 + \frac{bc}{2a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{bc}{a} = 2\left(\frac{1}{1-vw} - 1\right);$$

Aplicando o mesmo raciocínio para os outros lados, chegamos as igualdades:

$$\frac{bc}{a} = 2\left(\frac{1}{1-vw} - 1\right); \frac{ac}{b} = 2\left(\frac{1}{1-uw} - 1\right); \frac{ab}{c} = 2\left(\frac{1}{1-uv} - 1\right);$$

Multiplicando essas igualdades duas a duas, teremos:

$$a = 2\sqrt{\left(\frac{1}{1-uv} - 1\right)\left(\frac{1}{1-uw} - 1\right)}$$
$$b = 2\sqrt{\left(\frac{1}{1-uv} - 1\right)\left(\frac{1}{1-vw} - 1\right)};$$
$$c = 2\sqrt{\left(\frac{1}{1-uw} - 1\right)\left(\frac{1}{1-vw} - 1\right)};$$

Observe que uma implicação lógica dessa substituição é:

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4 \Rightarrow$$
$$4\left(\frac{1}{1-uv} - 1\right)\left(\frac{1}{1-uw} - 1\right) + 4\left(\frac{1}{1-uv} - 1\right)\left(\frac{1}{1-vw} - 1\right) + 4\left(\frac{1}{1-uw} - 1\right)\left(\frac{1}{1-vw} - 1\right) +$$

$8\left(\frac{1}{1-uv}-1\right)\left(\frac{1}{1-uw}-1\right)\left(\frac{1}{1-vw}-1\right)=4$

Dividindo tudo por 4, teremos que a condição ficará reescrita como:

$\left(\frac{1}{1-vw}-1\right)\left(\frac{1}{1-uw}-1\right)+\left(\frac{1}{1-vw}-1\right)\left(\frac{1}{1-uv}-1\right)+\left(\frac{1}{1-uw}-1\right)\left(\frac{1}{1-uv}-1\right)+$
$2\left(\frac{1}{1-uv}-1\right)\left(\frac{1}{1-uw}-1\right)\left(\frac{1}{1-vw}-1\right)=1$

Já sabemos que essa expressão é equivalente a:

$$uv+vw+uw=1$$

Por outro lado, nossa desigualdade fica reescrita como:

$2\left(\frac{1}{1-uv}-1\right)\sqrt{\left(\frac{1}{1-vw}-1\right)\left(\frac{1}{1-uw}-1\right)}+2\left(\frac{1}{1-uw}-1\right)\sqrt{\left(\frac{1}{1-vw}-1\right)\left(\frac{1}{1-uv}-1\right)}+$
$2\left(\frac{1}{1-vw}-1\right)\sqrt{\left(\frac{1}{1-uw}-1\right)\left(\frac{1}{1-uv}-1\right)}-4\left(\frac{1}{1-uv}-1\right)\left(\frac{1}{1-uw}-1\right)\left(\frac{1}{1-vw}-1\right)\leq$
1

$2\left(\frac{uv}{1-uv}\right)\sqrt{\left(\frac{vw}{1-vw}\right)\left(\frac{uw}{1-uw}\right)}+2\left(\frac{uw}{1-uw}\right)\sqrt{\left(\frac{vw}{1-vw}\right)\left(\frac{uv}{1-uv}\right)}+$
$2\left(\frac{vw}{1-vw}\right)\sqrt{\left(\frac{uw}{1-uw}\right)\left(\frac{uv}{1-uv}\right)}-4\left(\frac{uv}{1-uv}\right)\left(\frac{uw}{1-uw}\right)\left(\frac{vw}{1-vw}\right)\leq 1$

Usando que $uv+vw+uw=1$, teremos:

$2\left(\frac{uv}{vw+uw}\right)\sqrt{\left(\frac{vw}{uv+uw}\right)\left(\frac{uw}{vw+uv}\right)}+2\left(\frac{uw}{vw+uv}\right)\sqrt{\left(\frac{vw}{uv+uw}\right)\left(\frac{uv}{uw+vw}\right)}+$
$2\left(\frac{vw}{uv+uw}\right)\sqrt{\left(\frac{uw}{uv+vw}\right)\left(\frac{uv}{uw+vw}\right)}-4\left(\frac{uv}{uw+vw}\right)\left(\frac{uw}{uv+vw}\right)\left(\frac{vw}{uv+uw}\right)\leq$
1

$\frac{2uv}{v+u}\sqrt{\frac{1}{(u+w)(v+w)}}+\frac{2uw}{w+u}\sqrt{\frac{1}{(v+w)(u+v)}}+\frac{2vw}{v+w}\sqrt{\frac{1}{(u+v)(u+w)}}-$
$\frac{4uvw}{(u+v)(v+w)(u+w)}\leq 1$

$\frac{2uv\sqrt{(u+w)(v+w)}}{(u+w)(v+w)(v+u)}+\frac{2uw\sqrt{(v+w)(u+v)}}{(u+w)(v+w)(v+u)}+\frac{2vw\sqrt{(u+v)(u+w)}}{(u+v)(v+w)(u+w)}-\frac{4uvw}{(u+v)(v+w)(u+w)} \leq 1$

Nossa desigualdade ficará reescrita como:

Desigualdade A:

$$\frac{2uv\sqrt{(u+w)(v+w)}}{(u+w)(v+w)(v+u)}+\frac{2uw\sqrt{(v+w)(u+v)}}{(u+w)(v+w)(v+u)}+\frac{2vw\sqrt{(u+v)(u+w)}}{(u+v)(v+w)(u+w)}-\frac{4uvw}{(u+v)(v+w)(u+w)} \leq 1$$

A desigualdade que temos que provar agora é a Desigualdade A.Vamos prová-la, para tanto, considere que o quadrado de todo número real é positivo, sendo assim teremos:

$0 \leq (\sqrt{(v+w)}-\sqrt{(u+w)})^2 \Rightarrow 2\sqrt{(v+w)(u+w)} \leq (v+w)+(u+w) \Rightarrow \frac{2uv\sqrt{(v+w)(u+w)}}{(v+w)(u+w)(u+v)} \leq \frac{((v+w)+(u+w))uv}{(v+w)(u+w)(u+v)}$

$0 \leq (\sqrt{(v+w)}-\sqrt{(u+v)})^2 \Rightarrow 2\sqrt{(v+w)(u+v)} \leq (v+w)+(u+v) \Rightarrow \frac{2uw\sqrt{(v+w)(u+v)}}{(v+w)(u+w)(u+v)} \leq \frac{((v+w)+(u+v))uw}{(v+w)(u+w)(u+v)}$

$0 \leq (\sqrt{(u+w)}-\sqrt{(u+v)})^2 \Rightarrow 2\sqrt{(u+w)(u+v)} \leq (u+w)+(u+v) \Rightarrow \frac{2vw\sqrt{(u+w)(u+v)}}{(v+w)(u+w)(u+v)} \leq \frac{((u+w)+(u+v))vw}{(v+w)(u+w)(u+v)}$

Somando todas as desigualdades acima e subtraindo $\frac{4uvw}{(v+w)(u+w)(u+v)}$ em ambos os lados, teremos a desigualdade abaixo (que vamos chamar de desigualdade B):

Desigualdade B:

$$\frac{2uv\sqrt{(v+w)(u+w)}}{(v+w)(u+w)(u+v)} + \frac{2uw\sqrt{(v+w)(u+v)}}{(v+w)(u+w)(u+v)} + \frac{2vw\sqrt{(u+w)(u+v)}}{(v+w)(u+w)(u+v)} - \frac{4uvw}{(v+w)(u+w)(u+v)} \leq$$
$$\frac{((v+w)+(u+w))uv + ((u+w)+(u+v))vw + ((v+w)+(u+v))uw}{(v+w)(u+w)(u+v)} - \frac{4uvw}{(v+w)(u+w)(u+v)}$$

É possível ver que

$$\begin{aligned}
&((v+w)+(u+w))uv + ((u+w)+(u+v))vw + ((v+w)+(u+v))uw - 4uvw = \\
&(u+v)uv + (v+w)vw + (u+w)uw + 2uvw = \\
&uv(u+v+w) + (u+v+w)uw + (v+w)vw = \\
&u(u+v+w)(v+w) + (v+w)vw = \\
&(v+w)(u(u+v) + uw + vw) = \\
&(v+w)(u(u+v) + w(u+v)) = \\
&(v+w)(u+w)(u+v)
\end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na Desigualdade B, provamos a Desigualdade A.Quod erat demonstrandum 😉.

5. ("103 Problems From the Training USA IMO Team"-Titu Andreescu)In triangle ABC, show that $cosA + cosB + cosC \leq \dfrac{3}{2}$

Solução 1:
Pela desigualdade das médias, teremos:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \tag{28}$$

$$x + z \geq 2\sqrt{xz} \tag{29}$$

$$y + z \geq 2\sqrt{yz} \tag{30}$$

Multiplicando (28), (29) e (30), teremos:

$$(x + y)(x + z)(y + z) \geq 8xyz$$

$$\frac{1}{8} \geq \frac{xyz}{(x + y)(x + z)(y + z)}$$

$$\frac{1}{8} \geq \sqrt{\frac{xy}{(x + z)(y + z)}}\sqrt{\frac{xz}{(x + y)(y + z)}}\sqrt{\frac{yz}{(x + y)(x + z)}}$$

Mas pela substituição (26), temos que:

$$\frac{1}{8} \geq sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{1}{2} \geq 4sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{1}{2} + 1 \geq 1 + 4sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{3}{2} \geq cos\alpha + cos\beta + cos\gamma$$

$$cos\alpha + cos\beta + cos\gamma \leq \frac{3}{2}$$

Solução 2: Vamos quebrar um pouco a monotonia das soluções e aplicar ideias diferentes.Pela desigualdade das médias, sabemos que:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$$

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$$

$$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2$$

Somando essas três desigualdades, temos que:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\geq 6$$

Somando 3 nos dois lados da desigualdade acima, teremos:

$$\begin{gathered}
(a+b+c)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\geq 9 \Leftrightarrow\\
(a+b+c)\left(ab+bc+ac\right)\geq 9abc \Leftrightarrow\\
ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\geq 6abc \Leftrightarrow\\
ab(a+b)+abc+bc(b+c)+abc+ac(a+c)\geq 8abc \Leftrightarrow\\
ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ac(a+c)\geq 8abc \Leftrightarrow\\
(a+b+c)(ab+bc)+ac(a+c)\geq 8abc \Leftrightarrow\\
(ab+b^2+bc)(a+c)+ac(a+c)\geq 8abc \Leftrightarrow\\
(ab+b^2+bc+ac)(a+c)\geq 8abc \Leftrightarrow\\
(b(a+b)+(a+b)c)(a+c)\geq 8abc \Leftrightarrow\\
(b+c)(a+c)(a+b)\geq 8abc
\end{gathered}$$

Fazendo[4] $a=tan\dfrac{\alpha}{2}, b=tan\dfrac{\beta}{2}, c=tan\dfrac{\gamma}{2}$:

$$\left(tan\frac{\alpha}{2}+tan\frac{\beta}{2}\right)\left(tan\frac{\alpha}{2}+tan\frac{\gamma}{2}\right)\left(tan\frac{\beta}{2}+tan\frac{\gamma}{2}\right)\geq 8tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2}$$

Desde que $cyc\left(tan\dfrac{\alpha}{2}+tan\dfrac{\beta}{2}\right)=cyc\left(\dfrac{sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}+cos\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}}\right)=cyc\left(\dfrac{sen\frac{\alpha+\beta}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}}\right)=$ $cyc\left(\dfrac{cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}}\right)=cyc\left(\dfrac{cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}}\right)=cyc\left(\dfrac{cos\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}}\right)$, a desigualdade acima é equivalente a:

[4] Eu bem poderia ter provado essa desigualdade como explicitado na primeira solução do problema 5, faça suas escolhas, a matemática tem vários caminhos

$$\frac{1}{8} \geq sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}$$

Que, como vimos anteriormente, é equivalente a desigualdade do enunciado.

Solução 3: Na questão 21, provaremos que:

$$sen2\alpha + sen2\beta + sen2\gamma \leq sen\alpha + sen\beta + sen\gamma$$

Pelas identidades 2 e 3, sabemos que:

$$sen\alpha + sen\beta + sen\gamma = 4cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$$

$$sen2\alpha + sen2\beta + sen2\gamma = 4sen\alpha sen\beta sen\gamma$$

Então a desigualdade acima é equivalente a:

$$sen\alpha sen\beta sen\gamma \leq cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$$

Usando o seno do arco duplo, chegamos à desigualdade abaixo:

$$sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$

Que já sabemos ser equivalente à desigualdade do problema.

6. ("103 Problems From the Training USA IMO Team"-Titu Andreescu)Let ABC be a triangle. Prove that:

$$sen^2\frac{A}{2}+sen^2\frac{B}{2}+sen^2\frac{C}{2}\geq\frac{3}{4}$$

Solução 1:

Pela desigualdade que relaciona a média aritmética e geométrica em seis variáveis, sabemos que vale:

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{6}\geq\sqrt[6]{abcdef}$$

Fazendo $a=x^2y, b=xy^2, c=xz^2, d=x^2z, e=y^2z, f=yz^2$, teremos:

$$x^2y+xy^2+xz^2+x^2z+y^2z+yz^2\geq 6xyz$$

$$xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)\geq 6xyz$$

$$\frac{xy}{(x+z)(y+z)}+\frac{xz}{(x+y)(y+z)}+\frac{yz}{(x+y)(x+z)}\geq\frac{6xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)}$$

Pela substituição (26), teremos:

$$sen^2\frac{A}{2}+sen^2\frac{B}{2}+sen^2\frac{C}{2}\geq 6sen\frac{A}{2}sen\frac{B}{2}sen\frac{C}{2}$$

Usando que $sen^2\frac{A}{2}+sen^2\frac{B}{2}+sen^2\frac{C}{2}+2sen\frac{A}{2}sen\frac{B}{2}sen\frac{C}{2}=1\Rightarrow 2sen\frac{A}{2}sen\frac{B}{2}sen\frac{C}{2}=1-\left(sen^2\frac{A}{2}+sen^2\frac{B}{2}+sen^2\frac{C}{2}\right)$, substituindo na desigualdade, teremos:

$$sen^2\frac{A}{2}+sen^2\frac{B}{2}+sen^2\frac{C}{2}\geq 3\left(1-\left(sen^2\frac{A}{2}+sen^2\frac{B}{2}+sen^2\frac{C}{2}\right)\right)$$

Daqui segue o resultado...

Solução 2: Multiplicando a desigualdade por -2 e somando 3 em ambos os lados da desigualdade resultante, e usando o cosseno do arco duplo, recaímos na desigualdade do problema anterior.

7. ("103 Problems From the Training USA IMO Team"-Titu Andreescu)Let ABC be a triangle. Prove that:

$$cotAcotB + cotBcotC + cotAcotC = 1$$

Conversely, prove that if x, y,z are real numbers with $xy + yz + xz = 1$, then there exists a triangle ABC such that $cotA = x, cotB = y$ and $cotC = z$.

Solução 1:

Sejam x,y e z números complexos tais que $x + y + z = xyz$, veja o que podemos fazer com a igualdade abaixo:

$$\frac{4(x+y+z)}{4(x+y+z)} = 1$$

$$\frac{x+y+z+3(x+y+z)}{4(x+y+z)} = 1$$

$$\frac{x+y+z+3xyz}{4(x+y+z)} = 1$$

$$\frac{x+y+z+3xyz+(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+yz^2+y^2z)-(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+yz^2+y^2z)}{4(x+y+z)} = 1$$

$$\frac{(x-xy^2-xz^2+(x+y+z)yz)+(y-yx^2-yz^2+(x+y+z)xz)+(z-zx^2-zy^2+(x+y+z)xy)}{4(x+y+z)} = 1$$

$$\frac{(x-xy^2-xz^2+xy^2z^2)+(y-yx^2-yz^2+x^2yz^2)+(z-zx^2-zy^2+x^2y^2z)}{4(x+y+z)} = 1$$

$$\frac{(1-y^2-z^2+y^2z^2)x}{4(x+y+z)} + \frac{(1-x^2-z^2+x^2z^2)y}{4(x+y+z)} + \frac{(1-x^2-y^2+x^2y^2)z}{4(x+y+z)} = 1$$

$$\frac{(1-y^2)(1-z^2)x}{4(x+y+z)} + \frac{(1-x^2)(1-z^2)y}{4(x+y+z)} + \frac{(1-x^2)(1-y^2)z}{4(x+y+z)} = 1$$

$$\frac{(1-y^2)(1-z^2)x}{4xyz} + \frac{(1-x^2)(1-z^2)y}{4xyz} + \frac{(1-x^2)(1-y^2)z}{4xyz} = 1$$

$$\frac{(1-y^2)(1-z^2)}{4yz} + \frac{(1-x^2)(1-z^2)}{4xz} + \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{4xy} = 1$$

Fazendo x=1/a,y=1/b e z=1/c, podemos ver facilmente que se $ab + ac + bc = 1$, então vale:

$$\frac{(1-b^2)(1-c^2)}{4bc} + \frac{(1-a^2)(1-c^2)}{4ac} + \frac{(1-b^2)(1-c^2)}{4bc} = 1$$

Fazendo $tan\dfrac{\alpha}{2} = a, tan\dfrac{\beta}{2} = b, tan\dfrac{\gamma}{2} = c$, nossa condição fica reescrita como $tan\dfrac{\alpha}{2}tan\dfrac{\beta}{2}+tan\dfrac{\beta}{2}tan\dfrac{\gamma}{2}+tan\dfrac{\alpha}{2}tan\dfrac{\gamma}{2} = 1$, bem como essa condição deve implicar que:

$$\frac{\left(1-tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-tan^2\frac{\beta}{2}\right)}{4tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\beta}{2}}+\frac{\left(1-tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-tan^2\frac{\gamma}{2}\right)}{4tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\gamma}{2}}+\frac{\left(1-tan^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1-tan^2\frac{\gamma}{2}\right)}{4tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2}} = 1$$

Usando que para qualquer u real temos que $tan2u = \dfrac{2tanu}{1-tan^2u} \Rightarrow cot2u = \dfrac{1-tan^2u}{2tanu}$, teremos que:

$$cot\alpha cot\beta + cot\beta cot\gamma + cot\alpha cot\gamma = 1$$

Mas nossa condição para que a igualdade acima seja verdadeira é que $tan\dfrac{\alpha}{2}tan\dfrac{\beta}{2} + tan\dfrac{\beta}{2}tan\dfrac{\gamma}{2} + tan\dfrac{\alpha}{2}tan\dfrac{\gamma}{2} = 1$, mas veja que isso só pode acontecer se alpha, beta e gamma são ângulos de um triângulo, provando assim o que queríamos.

O que a segunda parte nos diz é que se $xy + xz + yz = 1$ então podemos substituir x, y e z por cotangentes de alpha, beta e gamma, sendo alpha, beta e gamma ângulos de um triângulo.Para a segunda parte, faça a substituição $m = x + \sqrt{1+x^2}, n = y + \sqrt{1+y^2}, o = z + \sqrt{1+z^2}$, desde que $2x = x + \sqrt{1+x^2} + x - \sqrt{1+x^2} = x + \sqrt{1+x^2} - \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = m - \dfrac{1}{m}$, por simetria concluímos as igualdades:

$$x = \frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{m}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{n}\right)$$

$$z = \frac{1}{2}\left(o - \frac{1}{o}\right)$$

Observe que:

$$\frac{1}{4}\left(m-\frac{1}{m}\right)\left(n-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{4}\left(m-\frac{1}{m}\right)\left(o-\frac{1}{o}\right)+\frac{1}{4}\left(n-\frac{1}{n}\right)\left(o-\frac{1}{o}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(mn-\frac{n}{m}-\frac{m}{n}+\frac{1}{mn}\right)+\left(mo-\frac{o}{m}-\frac{m}{o}+\frac{1}{mo}\right)+\left(no-\frac{n}{o}-\frac{o}{n}+\frac{1}{no}\right) = 4 \Leftrightarrow$$

$$(m^2n^2o-n^2o-m^2o+o)+(m^2o^2n-m^2n-o^2n+n)+(n^2o^2m-n^2m-o^2m+m) = 4mno \Leftrightarrow$$

$$m^2n^2o+m^2o^2n+n^2o^2m-(m+n+o)(mn+no+mo)+3mno+m+n+o = 4mno \Leftrightarrow$$

$$mno(mn+no+mo)-(m+n+o)(mn+no+mo)-mno+m+n+o = 0 \Leftrightarrow$$

$$(mno-(m+n+o))(mn+no+mo)-mno+m+n+o = 0 \Leftrightarrow$$

$$(mno-(m+n+o))(mn+no+mo-1)=0$$

Temos duas possibilidades ou $mno-(m+n+o)=0$ ou $mn+no+mo-1=0$, se $mn+no+mo-1=0$, então, fazendo a substituição $m=a=tan\frac{\alpha}{2}, n=b=tan\frac{\beta}{2}, o=c=tan\frac{\gamma}{2}$ obtemos $tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\beta}{2}+tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2}+tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\gamma}{2}=1$, já provamos que essa igualdade implica que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.Daí e pela substituição que fizemos, teremos que $x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-m\right)=\frac{1}{2}\left(cot\frac{\alpha}{2}-tan\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{cos^2\frac{\alpha}{2}-sen^2\frac{\alpha}{2}}{2sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{cos\alpha}{sen\alpha}=cot\alpha$ e provamos assim o que queríamos.Mas se $mno-(m+n+o)=0$ pela mesma substituição, teremos:

$$cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\beta}{2}+cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\gamma}{2}+cot\frac{\beta}{2}cot\frac{\gamma}{2}=1 \Leftrightarrow$$

$$cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\beta}{2}+cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\gamma}{2}+cot\frac{\beta}{2}cot\frac{\gamma}{2}-1=0 \Leftrightarrow$$

$$csc\frac{\alpha}{2}csc\frac{\beta}{2}csc\frac{\gamma}{2}\left(cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}+cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\gamma}{2}sen\frac{\beta}{2}+cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}sen\frac{\alpha}{2}-sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$csc\frac{\alpha}{2}csc\frac{\beta}{2}csc\frac{\gamma}{2}\left(cos\frac{\alpha}{2}\left(cos\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}+cos\frac{\gamma}{2}sen\frac{\beta}{2}\right)+sen\frac{\alpha}{2}\left(cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}-sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}\right)\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$csc\frac{\alpha}{2}csc\frac{\beta}{2}csc\frac{\gamma}{2}\left(cos\frac{\alpha}{2}sen\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)+sen\frac{\alpha}{2}cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$csc\frac{\alpha}{2}csc\frac{\beta}{2}csc\frac{\gamma}{2}sen\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)=0$$

O que implica que $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, essa solução serve apenas se $\alpha,\beta,\gamma>\frac{\pi}{2}$ e nesse caso não poderia haver um triângulo.

Solução 2:

Sabemos que alpha, beta e gammma são ângulos de um triângulo se e somente se:

$$tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\beta}{2}+tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2}+tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\gamma}{2}=1$$

Substituindo as tangentes por x,y e z, essa condição é equivalente a:

$$xy+xz+yz=1$$

Observe o que podemos fazer com isso:

$$xy+xz+yz=1$$

$$(xy+xz+yz)xyz=xyz$$

$$(xy{+}xz{+}yz)xyz{+}(x^2y{+}xy^2{+}x^2z{+}xz^2{+}yz^2{+}y^2z){-}(x^2y{+}xy^2{+}x^2z{+}xz^2{+}yz^2{+}y^2z)=xyz$$

$$z(xz{+}yz{-}x^2{-}y^2{+}x^2y^2){+}y(xy{+}yz{-}x^2{-}z^2{+}x^2z^2){+}x(xy{+}xz{-}y^2{-}z^2{+}y^2z^2)=xyz$$

$$z(xz{+}yz{+}xy{-}xy{-}x^2{-}y^2{+}x^2y^2){+}y(xy{+}yz{+}xz{-}xz{-}x^2{-}z^2{+}x^2z^2){+}x(xy{+}xz{+}yz{-}yz{-}y^2{-}z^2{+}y^2z^2)=xyz$$

$$z(1{-}xy{-}x^2{-}y^2{+}x^2y^2){+}y(1{-}xz{-}x^2{-}z^2{+}x^2z^2){+}x(1{-}yz{-}y^2{-}z^2{+}y^2z^2)=xyz$$

$$z(1-x^2-y^2+x^2y^2)+y(1-x^2-z^2+x^2z^2)+x(1-y^2-z^2+y^2z^2)=4xyz$$

$$\frac{(1-y^2)(1-z^2)}{4yz}+\frac{(1-x^2)(1-z^2)}{4xz}+\frac{(1-x^2)(1-y^2)}{4xy}=1$$

Desfazendo a substituição, teremos:

$$\frac{\left(1-tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-tan^2\frac{\beta}{2}\right)}{4tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\beta}{2}}+\frac{\left(1-tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-tan^2\frac{\gamma}{2}\right)}{4tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\gamma}{2}}+\frac{\left(1-tan^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1-tan^2\frac{\gamma}{2}\right)}{4tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2}}=1$$

Usando que para qualquer u real temos que
$tan2u=\dfrac{2tanu}{1-tan^2u}\Rightarrow cot2u=\dfrac{1-tan^2u}{2tanu}$, teremos que:

$$cot\alpha cot\beta+cot\beta cot\gamma+cot\alpha cot\gamma=1$$

Mas nossa condição para que a igualdade acima seja verdadeira é que
$tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\beta}{2}+tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2}+tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\gamma}{2}=1$, mas veja que isso só pode acontecer se alpha, beta e gamma são ângulos de um triângulo, provando assim o que queríamos.Para a segunda parte faça a substituição $x=cot\alpha, y=cot\beta, z=cot\gamma$ e teremos:

$$cot\alpha cot\beta+cot\alpha cot\gamma+cot\beta cot\gamma=1\Leftrightarrow$$

$$cot\alpha cot\beta+cot\alpha cot\gamma+cot\beta cot\gamma-1=0\Leftrightarrow$$

$$csc\alpha csc\beta csc\gamma \left(cos\alpha cos\beta sen\gamma + cos\alpha cos\gamma sen\beta + cos\beta cos\gamma sen\alpha - sen\alpha sen\beta sen\gamma\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$csc\alpha csc\beta csc\gamma \left(cos\alpha(cos\beta sen\gamma + cos\gamma sen\beta) + sen\alpha(cos\beta cos\gamma - sen\beta sen\gamma)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$csc\alpha csc\beta csc\gamma \left(cos\alpha sen(\beta+\gamma) + sen\alpha cos(\beta+\gamma)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$csc\alpha csc\beta csc\gamma sen(\alpha+\beta+\gamma) = 0$$

Desde que $\alpha < \pi$ e $\beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ isto implica finalmente que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

8.("Solving Problems in Algebra and Trigonometry"-V.Litvinenko e A.Mordkovich)Prove that:

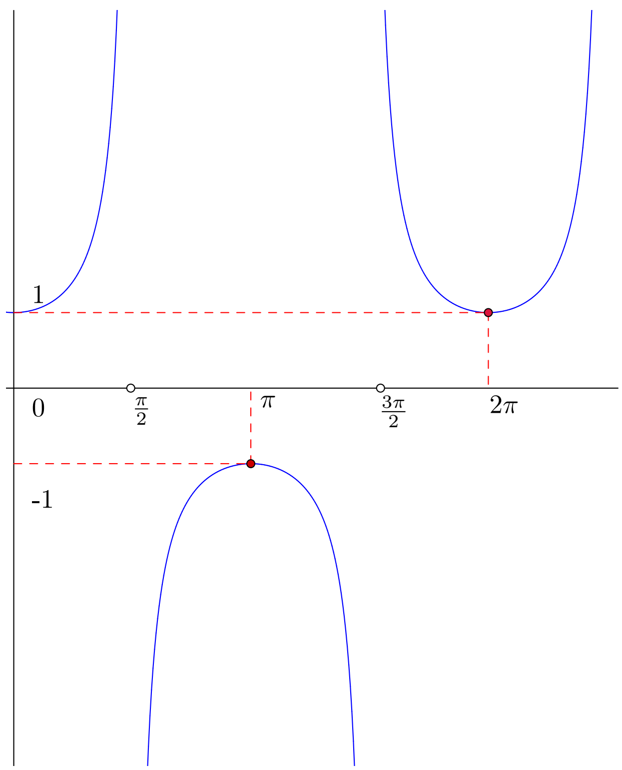
$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma \geq 1$$

if α, β, γ are sizes of the angles of a non-acute triangle.

Solução 1:
Nessa primeira solução, vou provar que se o triângulo é obtuso então vale que

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma > 1$$

Depois provo que sempre que o triângulo é retângulo ocorre a igualdade. Seja γ o maior ângulo deste triângulo, como γ está entre $\frac{\pi}{2}$ e π sua secante é negativa, como podemos ver no gráfico abaixo :



Logo, teremos que:

$$sec\gamma < 0$$

Multiplicando ambos os lados por $sec\alpha sec\beta$ a desigualdade não se altera,pois α, β estão no primeiro quadrante, veja:

$$sec\alpha sec\beta sec\gamma < 0$$

Observe que $cos(\alpha+\beta+\gamma)=-1$, portanto, se multiplicarmos a desigualdade por $cos(\alpha+\beta+\gamma)$ o sinal da desigualdade inverte, veja:

$$sec\alpha sec\beta sec\gamma cos(\alpha+\beta+\gamma) > 0$$

$$sec\alpha sec\beta sec\gamma (cos(\alpha+\beta)cos(\gamma) - sen(\alpha+\beta)sen(\gamma)) > 0$$

$$sec\alpha sec\beta sec\gamma ((cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta))cos(\gamma) - (sen(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sen(\beta))sen(\gamma)) > 0$$

$$sec\alpha sec\beta sec\gamma (cos(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma) - (sen(\alpha)sen(\beta)cos(\gamma) + sen(\alpha)sen(\gamma)cos(\beta) + sen(\beta)sen(\gamma)cos(\alpha))) > 0$$

$$1 - (tan(\alpha)tan(\beta) + tan(\alpha)tan(\gamma) + tan(\beta)tan(\gamma)) > 0$$

Multiplicando os dois lados por $cot\alpha cot\beta cot\gamma$(a desigualdade inverte pois uma das cotangentes é negativa devido ao fato de pelo menos um ângulo ser obtuso), vem:

$$cot\alpha cot\beta cot\gamma - (cot\alpha + cot\beta + cot\gamma) < 0$$

$$cot\alpha cot\beta cot\gamma < cot\alpha + cot\beta + cot\gamma$$

Fazendo $x = cot(\alpha), y = cot(\beta), z = cot(\gamma)$, vem

$$xyz < x + y + z$$

$$x + y + z > xyz$$

$$2x + 2y + 2z > 2xyz$$

$$(x+y) + (x+z) + (y+z) > 2xyz$$

$$xyz(x+y) + xyz(x+z) + xyz(y+z) < 2x^2y^2z^2$$

$$xy(xz+yz) + xz(xy+yz) + yz(xy+xz) < 2x^2y^2z^2$$

$$xy(xy+xz+yz-xy) + xz(xy+xz+yz-xz) + yz(xy+xz+yz-yz) < 2x^2y^2z^2$$

$$xy(1-xy) + xz(1-xz) + yz(1-yz) < 2x^2y^2z^2$$

$$xy + xz + yz - \left(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2\right) < 2x^2y^2z^2$$

$$xy + xz + yz < 2x^2y^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2$$

$$1 < 2x^2y^2z^2 + \left(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2\right)$$

$$3 < 6x^2y^2z^2 + \left(3x^2y^2 + 3y^2z^2 + 3x^2z^2\right)$$

$$3 + \left(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2\right) < 6x^2y^2z^2 + \left(4x^2y^2 + 4y^2z^2 + 4x^2z^2\right)$$

$$3 + \left(2x^2 + 2y^2 + 2z^2\right) + \left(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2\right) <$$
$$6x^2y^2z^2 + \left(2x^2 + 2y^2 + 2z^2\right) + \left(4x^2y^2 + 4y^2z^2 + 4x^2z^2\right)$$

$$\left(1 + y^2 + z^2 + y^2z^2\right) + \left(1 + x^2 + z^2 + x^2z^2\right) + \left(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2\right) <$$
$$2x^2\left(1 + y^2 + z^2 + y^2z^2\right) + 2y^2\left(1 + x^2 + z^2 + x^2z^2\right) + 2z^2\left(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2\right)$$

$\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)+\left(1+x^2\right)\left(1+z^2\right)+\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)<$
$2x^2\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)+2y^2\left(1+x^2\right)\left(1+z^2\right)+2z^2\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)$
Dividindo os dois lados por $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)$, teremos:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}<\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{2y^2}{1+y^2}+\frac{2z^2}{1+z^2}$$

Desfazendo a substituição feita no início, obtemos:

$$\frac{1}{1+cot^2\alpha}+\frac{1}{1+cot^2\beta}+\frac{1}{1+cot^2\gamma}<\frac{2cot^2\alpha}{1+cot^2\alpha}+\frac{2cot^2\beta}{1+cot^2\beta}+\frac{2cot^2\gamma}{1+cot^2\gamma}$$

$$sen^2\alpha+sen^2\beta+sen^2\gamma<2cos^2\alpha+2cos^2\beta+2cos^2\gamma$$
$$0<2cos^2\alpha+2cos^2\beta+2cos^2\gamma-(sen^2\alpha+sen^2\beta+sen^2\gamma)$$
$$3<2cos^2\alpha+2cos^2\beta+2cos^2\gamma+(1-sen^2\alpha+1-sen^2\beta+1-sen^2\gamma)$$
$$3<3cos^2\alpha+3cos^2\beta+3cos^2\gamma$$

Dividindo tudo por 3, podemos ver facilmente:

$$1<cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma$$
$$cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma>1$$

Agora nos resta provar que em um triângulo retângulo vale que:

$$cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma=1$$

Para isso, suponha por absurdo, que se α,β,γ são ângulos de um triângulo retângulo, vale que:

$$cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma\neq 1$$

Suponha sem perda de generalidade que $\alpha=\frac{\pi}{2}$, então teremos que $cos(\alpha)=0$, o que implica que

$$cos^2\beta+cos^2\gamma\neq 1$$

Mas como $\alpha+\beta+\gamma=\pi\Rightarrow\frac{\pi}{2}+\beta+\gamma=\pi\Rightarrow\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma$,de onde segue que:

$$cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)+cos^2(\gamma)\neq 1$$
$$sen^2(\gamma)+cos^2(\gamma)\neq 1$$

O que é um absurdo...Logo, está provado.

Solução 2:
Vamos transformar em produto a expressão abaixo, veja:

$$cosx + cosy + cosz + cos(x+y+z) =$$
$$2cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + 2cos\left(\frac{x+y+2z}{2}\right)cos\left(\frac{x+y}{2}\right) =$$
$$2cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + cos\left(\frac{x+y+2z}{2}\right)\right) =$$
$$2cos\left(\frac{x+y}{2}\right)2cos\left(\frac{x+z}{2}\right)cos\left(\frac{y+z}{2}\right) =$$
$$4cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x+z}{2}\right)cos\left(\frac{y+z}{2}\right)$$

De onde concluímos que sempre vale:

$$cosx + cosy + cosz + cos(x+y+z) = 4cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x+z}{2}\right)cos\left(\frac{y+z}{2}\right)$$

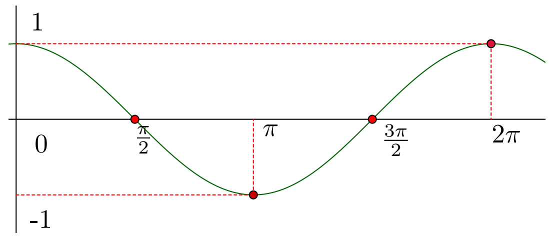
Fazendo $= 2\alpha, y = 2\beta, z = 2\gamma$, com alpha, beta e gamma sendo ângulos de um triângulo teremos:

$$cos2\alpha + cos2\beta + cos2\gamma + 1 = 4cos(\alpha+\beta)cos(\beta+\gamma)cos(\alpha+\gamma)$$
$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 + 2cos(\alpha+\beta)cos(\beta+\gamma)cos(\alpha+\gamma)$$
$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 - 2cos(\pi-(\alpha+\beta))cos(\pi-(\beta+\gamma))cos(\pi-(\alpha+\gamma))$$
$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 - 2cos(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma)$$

Suponha que gamma seja o maior ângulo do triângulo, como o triângulo é obtuso ou retângulo, segue que

$cos(\gamma) \leq 0 \Rightarrow -cos(\gamma) \geq 0 \Rightarrow -2cos(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma) \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - 2cos(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma) \geq 1 \Rightarrow cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma \geq 1$

Solução 3:



Sem perda de generalidade, seja gamma o maior ângulo deste triângulo, como o triângulo é obtuso ou retângulo, segue que $cos\gamma \leq 0$(o cosseno entre $\dfrac{\pi}{2}$ e π é negativo, como podemos ver pelo gráfico acima), partindo disso veja o que podemos fazer:

$$cos\gamma \leq 0$$
$$-cos(\pi - \gamma) \leq 0$$
$$cos(\pi - \gamma) \geq 0$$
$$cos(\alpha + \beta + \gamma - \gamma) \geq 0$$
$$cos(\alpha + \beta) \geq 0$$
$$cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta \geq 0$$
$$cos\alpha cos\beta \geq sen\alpha sen\beta$$
$$cot\alpha cot\beta \geq 1$$
$$2cot^2\alpha cot^2\beta \geq 2cot\alpha cot\beta$$
$$cot^2\alpha cot^2\beta + cot^2\alpha cot^2\beta \geq 2cot\alpha cot\beta$$
$$cot^2\alpha(csc^2\beta - 1) + (csc^2\alpha - 1)cot^2\beta \geq 2cot\alpha cot\beta$$
$$cot^2\alpha csc^2\beta + csc^2\alpha cot^2\beta \geq cot^2\alpha + 2cot\alpha cot\beta + cot^2\beta$$
$$(cot^2\alpha csc^2\beta + csc^2\alpha cot^2\beta)sen^2\alpha sen^2\beta \geq (cot^2\alpha + 2cot\alpha cot\beta + cot^2\beta)sen^2\alpha sen^2\beta$$
$$cos^2\alpha + cos^2\beta \geq cos^2\alpha sen^2\beta + 2cos\alpha cos\beta sen\alpha sen\beta + sen^2\alpha cos^2\beta$$
$$cos^2\alpha + cos^2\beta \geq (cos\alpha sen\beta + cos\beta sen\alpha)^2$$
$$cos^2\alpha + cos^2\beta \geq sen^2(\alpha + \beta)$$
$$cos^2\alpha + cos^2\beta - sen^2(\alpha + \beta) \geq 0$$
$$cos^2\alpha + cos^2\beta + 1 - sen^2(\alpha + \beta) \geq 1$$
$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2(\alpha + \beta) \geq 1$$
$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2(\pi - (\alpha + \beta)) \geq 1$$
$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2(\alpha + \beta + \gamma - (\alpha + \beta)) \geq 1$$
$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma \geq 1$$

10. (Problema sugerido por Israel Meireles Chrisostomo)Considere as proposições:

1.Dados 3 pontos não alinhados num plano, que estejam a uma distância a, b, c um do outro, encontre um ponto P, cuja distância aos três pontos é a mesma, chame essa distância de r.

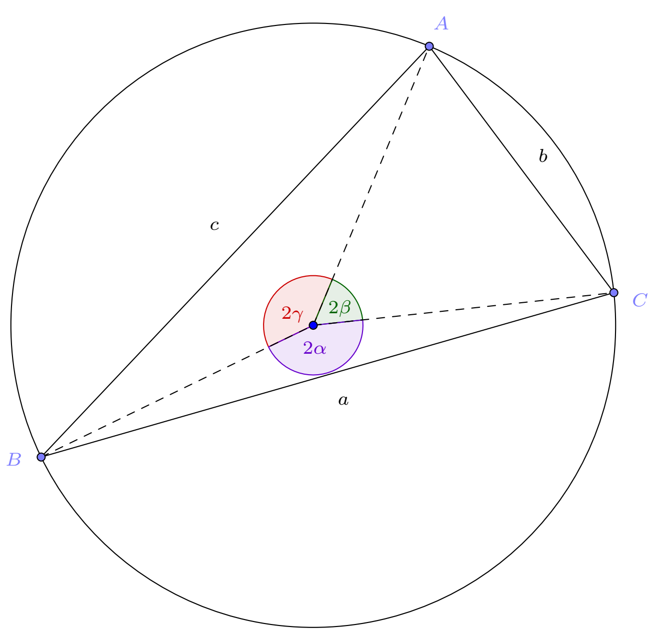
2.Escolha esses pontos de modo que P ou esteja sobre o segmento de reta que une dois desses pontos, ou de modo que P esteja sobre a área do triângulo compreendido por esses três pontos.

3. Imagine um ponto Q no espaço tridimensional e 3 retas perpendiculares entre si, se cruzando em um outro ponto S no espaço, nenhuma das quais passando por Q. Tomando uma dessas 3 retas, delimita-se a distância do ponto onde se cruzam até o ponto na reta em que a distância ao ponto Q é mínima, isto é feito com as 3 retas.

Prove que se as distâncias encontradas são iguais a a, b, c, então a distância de S até Q é maior ou igual a $2r\sqrt{2}$.

Demonstração

Primeiramente observe que a,b e c formam lados de um triângulo, e no caso em que o triângulo é retângulo, então, um dos lados desse triângulo intercepta o ponto P, já que o ponto P corresponde ao centro da circunferência circunscrita ao triângulo. Abaixo uma representação da figura formada pelas descrições 1 e 2.



Considere agora que pela lei dos cossenos, podemos deduzir:

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 cos(2\alpha) \tag{31}$$

$$b^2 = 2r^2 - 2r^2 cos(2\beta) \tag{32}$$

$$c^2 = 2r^2 - 2r^2 cos(2\gamma) \tag{33}$$

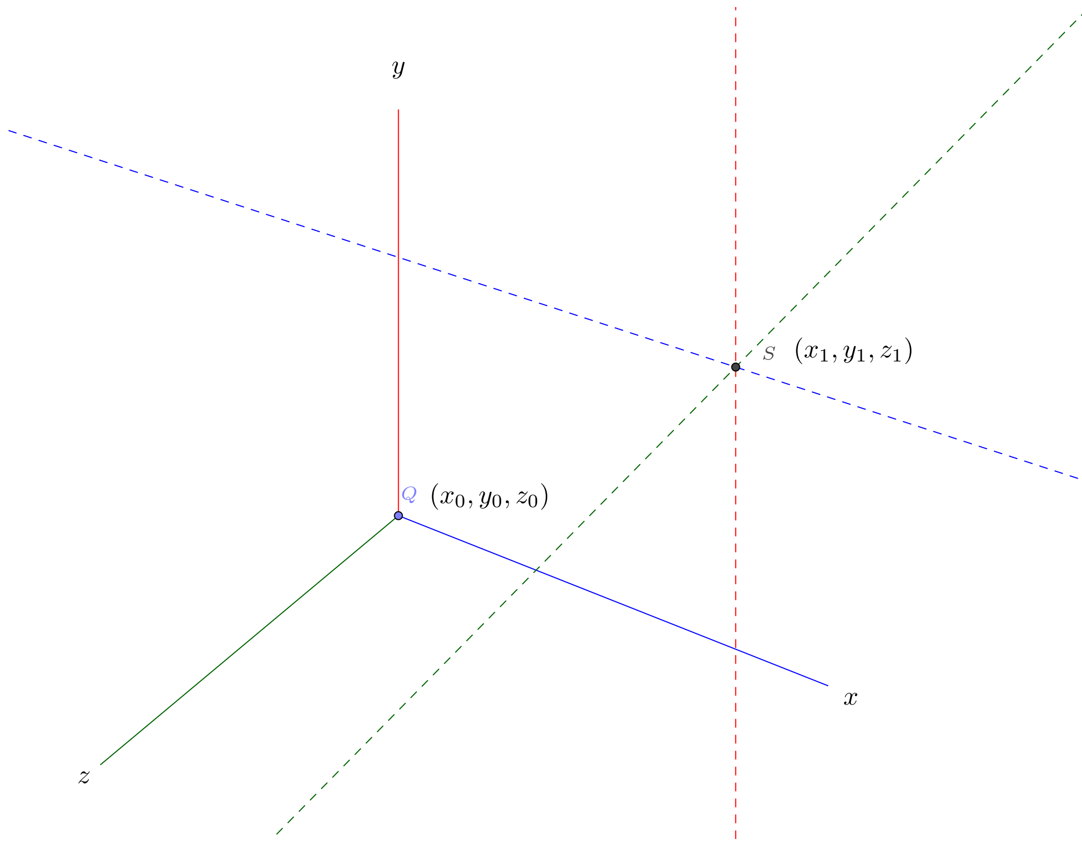
Somando as expressões acima, teremos:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6r^2 - 2r^2(cos(2\alpha) + cos(2\beta) + cos(2\gamma))$$

Usando transformações trigonométricas básicas, teremos:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4r^2(3 - (cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma))) \tag{34}$$

Vamos guardar essa equação e interpretar o passo 3.Nesse ponto, tudo depende da forma como mapearemos o ponto Q no espaço.Vamos criar um sistema tridimensional de eixos ortogonais e centrar esses eixos no ponto Q, em outras palavras Q está na origem do sistema de coordenadas cartesianas, diremos que a origem é dada pelo ponto (x_0, y_0, z_0), bem como o ponto S é dado por (x_1, y_1, z_1).Vamos escolher também, traçar os eixos coordenados de forma que cada eixo coordenado seja paralelo a cada uma das retas, por exemplo, se chamarmos as retas que se interceptam no problema de u,v e w, devemos escolher o eixo x paralelo a reta u, o eixo y paralelo a reta v, e o eixo z paralelo a reta w.Note que, ao fazermos essa escolha, a distância entre o ponto de interseção das três retas até o ponto mais próximo que essa reta está de Q nada mais é do que a diferença $x_1 - x_0$, bem como a da outra reta será $y_1 - y_0$, e da outra reta será $z_1 - z_0$.Veja a figura na próxima página, veja que as retas paralelas aparecem com a mesma cor:



Isto posto, suponha, por absurdo, que a distância de Q até S seja menor do que $2r\sqrt{2}$, usando a equação que retorna a distância entre 2 pontos em 3 dimensões, teremos:

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 < 8r^2 \tag{35}$$

Mas por hipótese $a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$,e $c = z_1 - z_0$, de onde teremos:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 8r^2 \tag{36}$$

Mas comparando (36) com (34), é possível ver que isso só ocorre se $cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) > 1$, mas note que alpha, beta e gamma são ângulos de um triângulo não obtusângulo , mas se alpha, beta e gamma são ângulos de um triângulo não obtusângulo, então essa desigualdade é impossível de ocorrer...Para provar isso podemos usar os cálculos anteriores. A igualdade ocorre quando o triângulo é retângulo...Ou seja, quando P está sobre o segmento de reta que une dois dos 3 pontos não alinhados do enunciado.

11 ("Inequalities theorems techniques and selected problems", Zdravko Cvetkovski)Let a,b,c $\in (-1,1)$ be real numbers such that $ab+ac+bc=1$.Prove the inequality:

$$6\sqrt[3]{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)} \leq 1+(a+b+c)^2$$

Solução 1: Primeiramente, suponha, sem perda de generalidade que a,b e c são positivos, e ainda, observe que se alpha, beta e gamma são ângulos de um triângulo vale:

$$cos\alpha cos\beta cos\gamma \leq \frac{1}{8}$$

Lembre-se que, para todo x real, temos $cos2x = \dfrac{1-tan^2x}{1+tan^2x}$, substituindo na desigualdade acima, teremos:

$$\frac{1-tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}}\frac{1-tan^2\frac{\beta}{2}}{1+tan^2\frac{\beta}{2}}\frac{1-tan^2\frac{\gamma}{2}}{1+tan^2\frac{\gamma}{2}} \leq \frac{1}{8}$$

$$8\left(1-tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-tan^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1-tan^2\frac{\gamma}{2}\right) \leq \left(1+tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+tan^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1+tan^2\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\left(1+tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+tan^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1+tan^2\frac{\gamma}{2}\right) \geq 8\left(1-tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-tan^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1-tan^2\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\sqrt[3]{\left(1+tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+tan^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1+tan^2\frac{\gamma}{2}\right)} \geq 2\sqrt[3]{\left(1-tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-tan^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1-tan^2\frac{\gamma}{2}\right)}$$

Substituindo as tangentes de alpha, beta e gamma por a,b e c, teremos

$$\sqrt[3]{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq 2\sqrt[3]{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)} \qquad (37)$$

Note que nossa condição para que a desigualdade acima seja verdadeira é que ab+ac+bc=1,pois alpha,beta e gamma são ângulos de um triângulo.Agora considere que :

$$1+(a+b+c)^2 = 1+a^2+b^2+c^2+2\underbrace{(ab+bc+ac)}_{=1} = a^2+b^2+c^2+3$$

De onde podemos ver que, aplicando a desigualdade das médias:

$$\frac{1+(a+b+c)^2}{3} = \frac{(a^2+1)+(b^2+1)+(c^2+1)}{3} \geq \sqrt[3]{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$$

Concluindo assim:

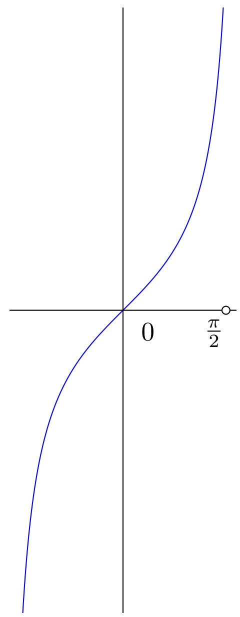
$ab+ac+bc=1 \Rightarrow \dfrac{1+(a+b+c)^2}{3} \geq \sqrt[3]{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$

Aplicando a desigualdade acima à desigualdade (37), teremos:

$$\frac{1+(a+b+c)^2}{3} \geq \sqrt[3]{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq 2\sqrt[3]{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

Usando a propriedade transitiva das desigualdades, a demonstração se conclui.

Observação Note que a princípio quando fizemos a substituição por tangentes, essas mesmas são tangentes de ângulos de um triângulo divididos por 2, o que implica que a tangente está no primeiro quadrante,onde a tangente é positiva, veja o gráfico:



O fato de que as tangentes são positivas parecem limitar a demonstração, pois essa substituição trigonométrica, nesse caso específico, só é válida para valores positivos.O que vou observar aqui é que se $a, b, c \in (-1, 1)$, então todas as variáveis são positivas ou todas as variáveis são negativas.Vamos provar isso, suponha que apenas uma das variáveis seja negativa, isto é a=-x,b=y,c=z com $1 > x, y, z > 0$, nossa condição fica reescrita como:

$$ab + ac + bc = -xy - xz + yz = 1$$

Agora como a,b e c estão entre 0 e 1, veja:

$$\underbrace{-(xy + xz)}_{x>0,y>0,z>0 \Rightarrow -(xy+xz)<0} \quad + \quad \underbrace{yz}_{y<1,z<1 \Rightarrow yz<1} \quad = 1$$

Em outras palavras temos um número menor do que 1 somado com um número negativo, o que com certeza é menor do que 1, contradizendo assim a condição.

Suponha que apenas duas variáveis sejam negativas, isto é a=-x,b=-y,c=z com $1 > x, y, z > 0$, nossa condição fica reescrita como:

$$ab + ac + bc = xy - xz - yz = 1$$

Como a,b e c estão entre 0 e 1, veja:

$$\underbrace{-(xz+yz)}_{x>0,y>0,z>0\Rightarrow-(xy+xz)<0} + \underbrace{xy}_{x<1,y<1\Rightarrow xy<1} = 1$$

Em outras palavras temos um número menor do que 1 somado com um número negativo, o que com certeza é menor do que 1, contradizendo assim a condição.

Bom, mas temos a última possibilidade, todos os números são negativos, mas se todos os números são negativos e temos um produto de 2 em 2 termos isto dá um número positivo,pois $(-m).(-n) = +mn$, portanto podemos supor sem perda de generalidade que a,b e c são positivos.

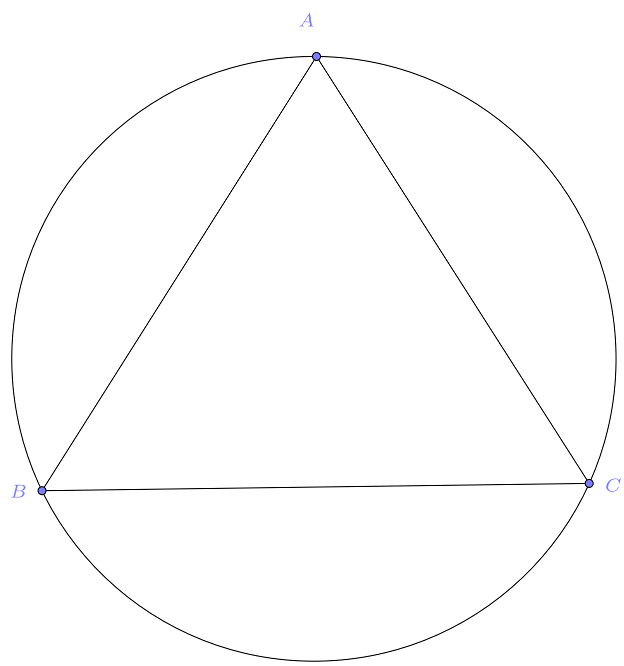
Solução 2: Use a desigualdade da média aritmética.

12. ("103 Trigonometry Problems from the training of the USA IMO Team"- Titu Andreescu) Let ABC be a triangle. Prove that

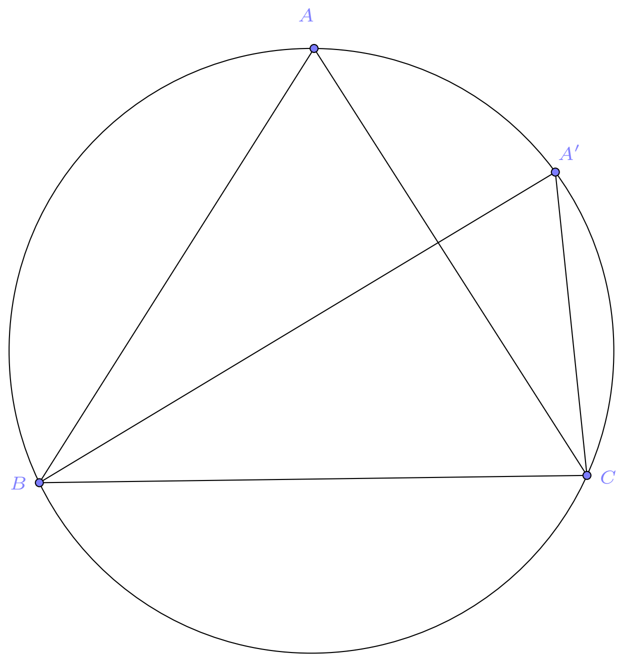
$$senA + senB + senC \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Solução 1:A demonstração que vou apresentar neste PDF é geométrica, e acredito ser muito elegante e simples.

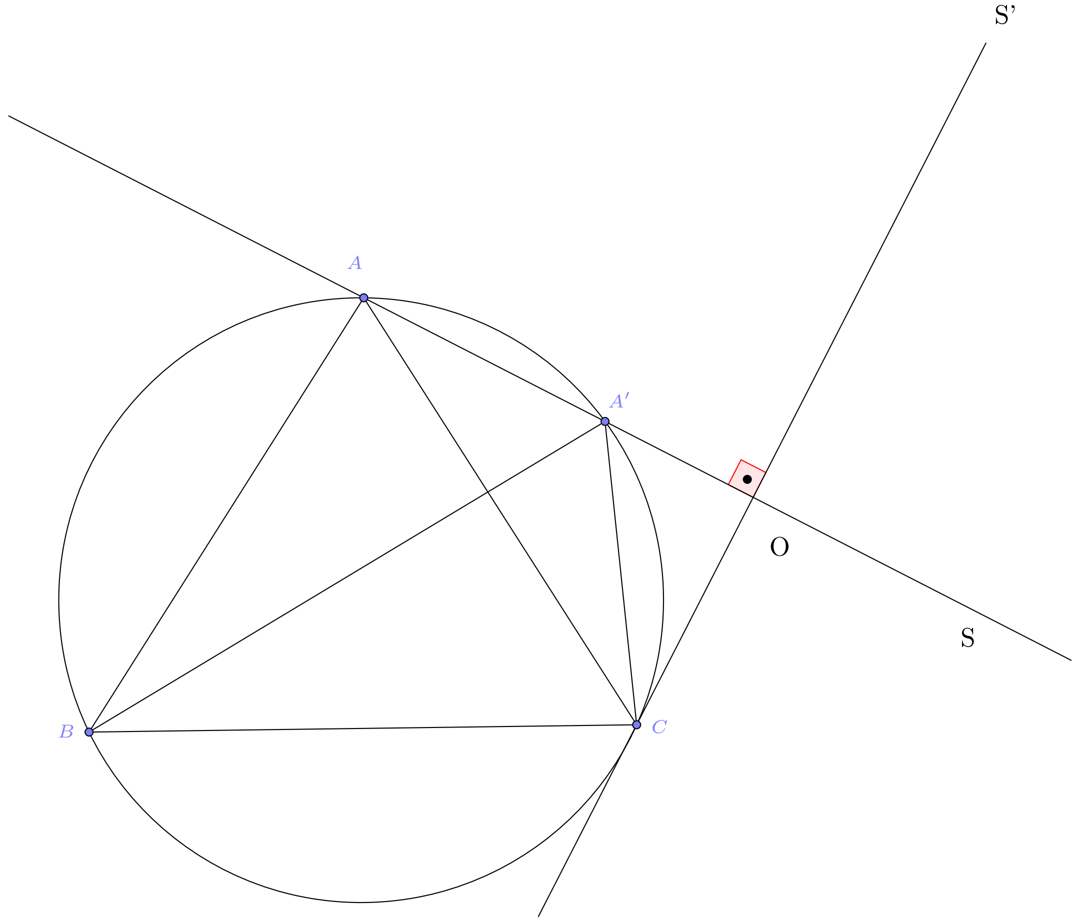
Nossa estratégia de demonstração é provar que dentre todos os triângulos inscritos, o que tem maior perímetro é o triângulo equilátero.Para isto, vamos inscrever um triângulo equilátero em uma circunferência qualquer.



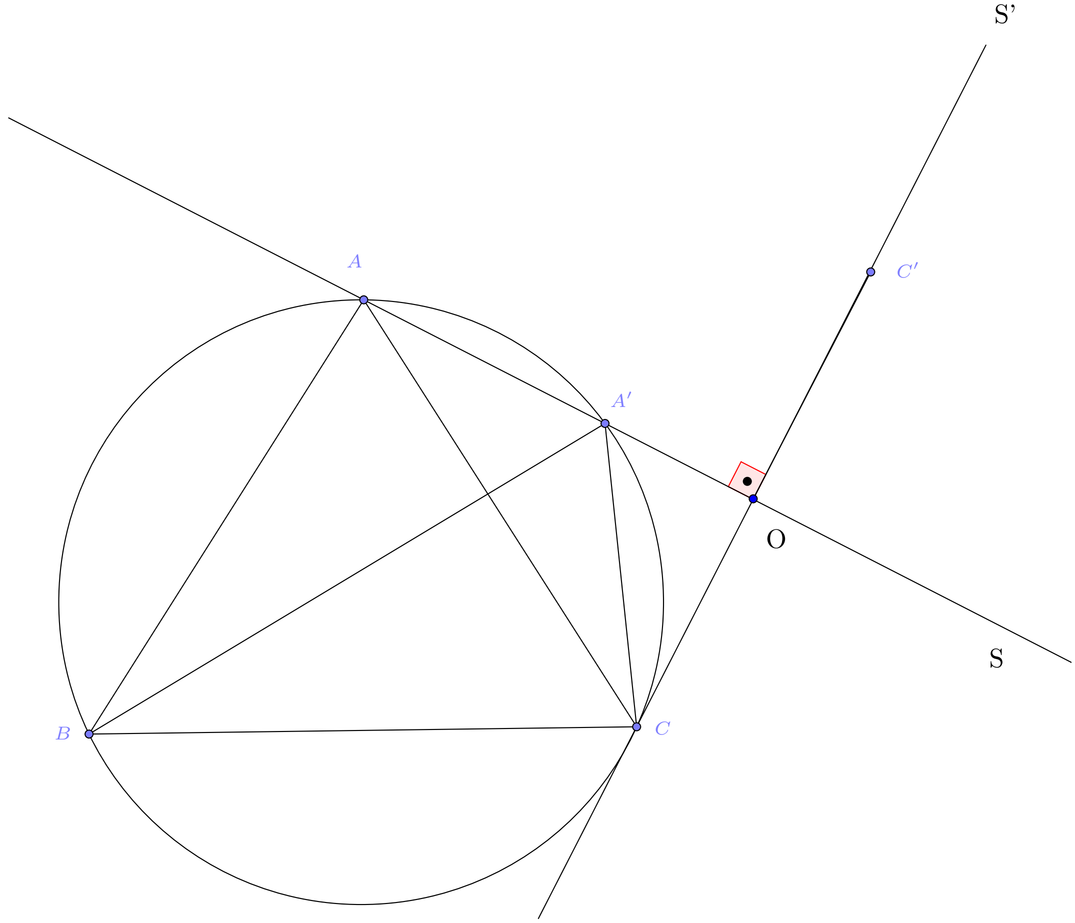
Vamos observar o que ocorre quando movimentamos o vértice A ao longo da circunferência(obtendo o vértice A').Veja a figura abaixo:



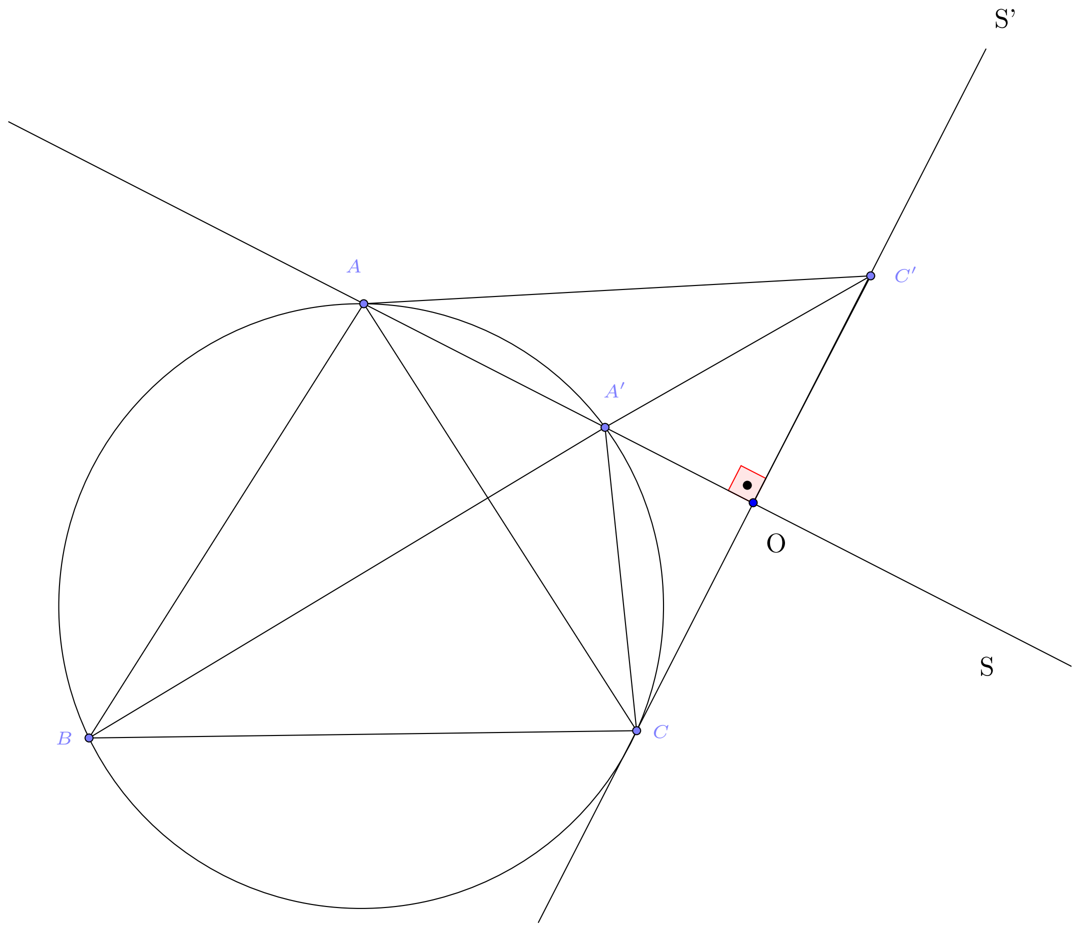
Ao final dessa demonstração o que ficará claro, é que quando movimentamos qualquer de seus vértices, como fizemos ao vértice A, o triângulo resultante (no exemplo o triângulo A'BC) possui perímetro menor.Vamos traçar na figura 2, uma reta S passando por A e A', e S', sua ortogonal no ponto O, interceptando o ponto C.



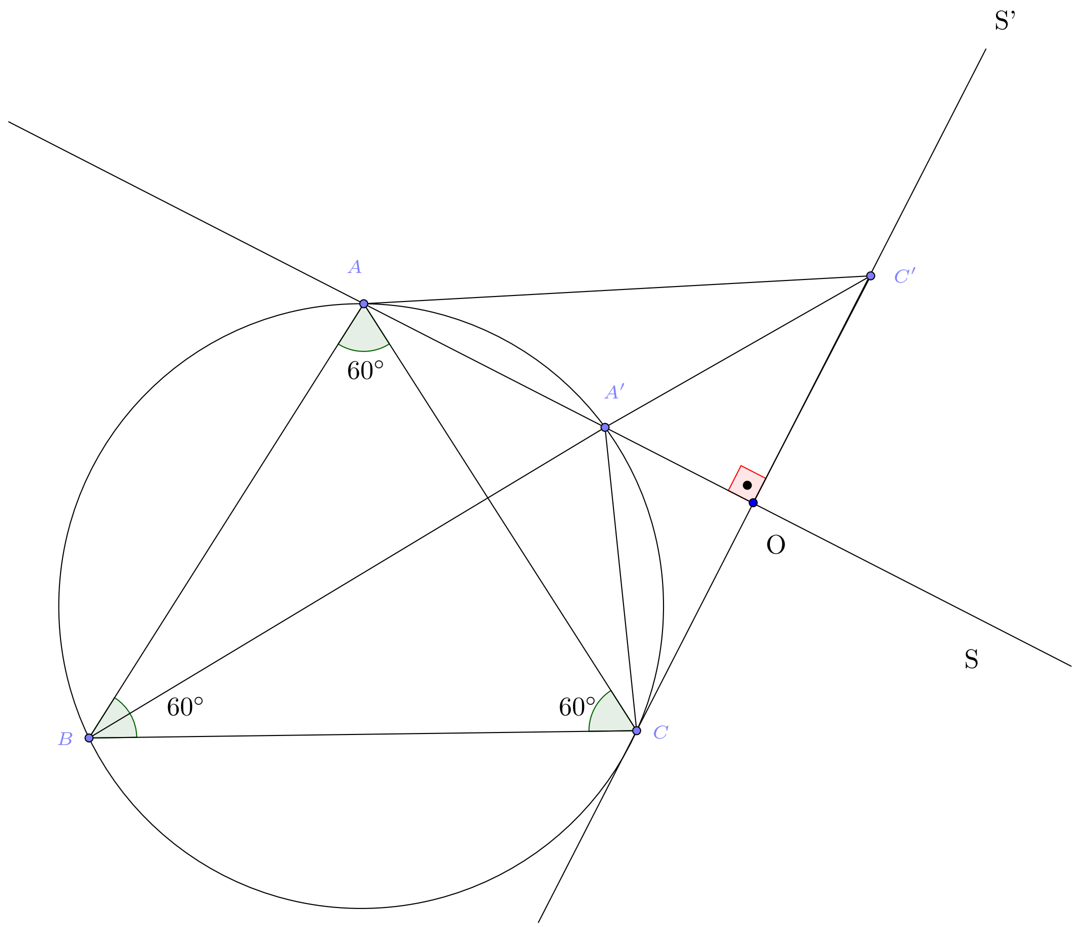
Vamos traçar um ponto C' acima de O, de modo que OC e OC' sejam congruentes:



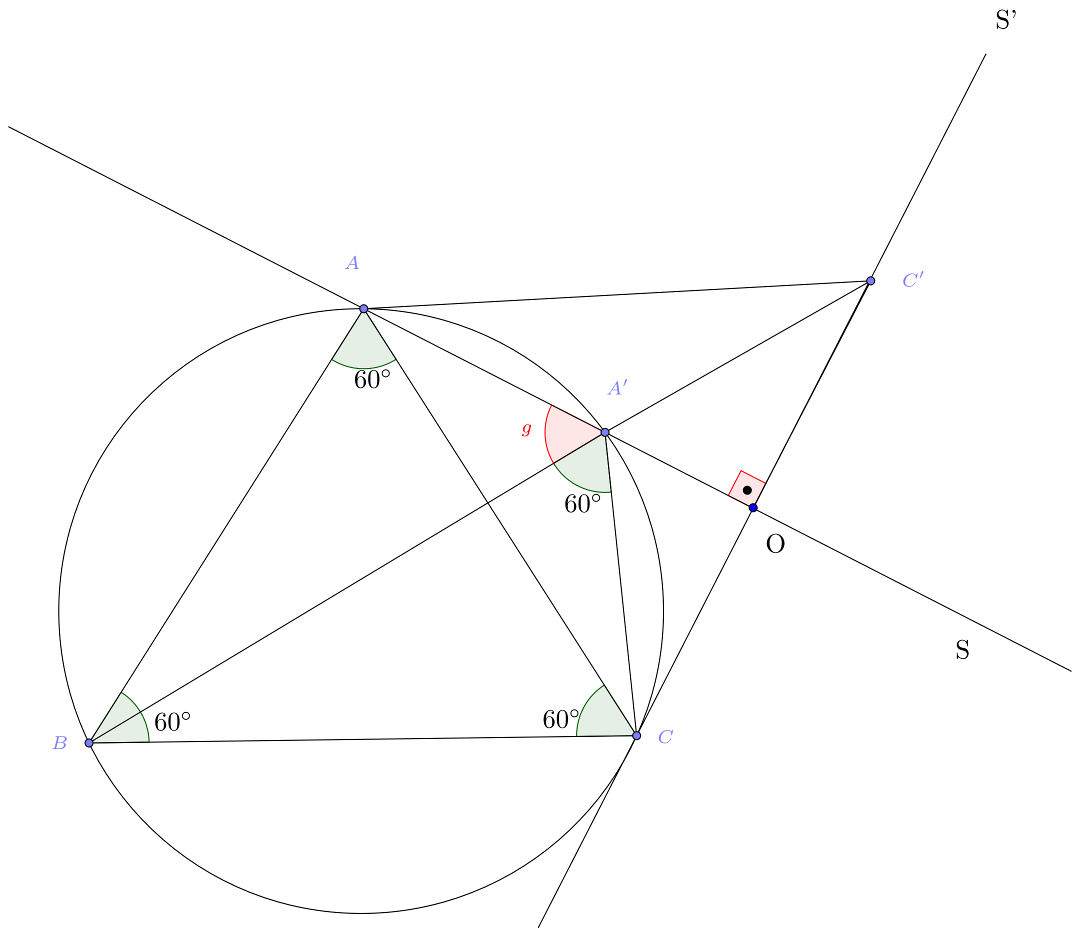
Vamos traçar A'C' e AC'.



Temos que o triângulo é equilátero, logo cada ângulo vale 60°.

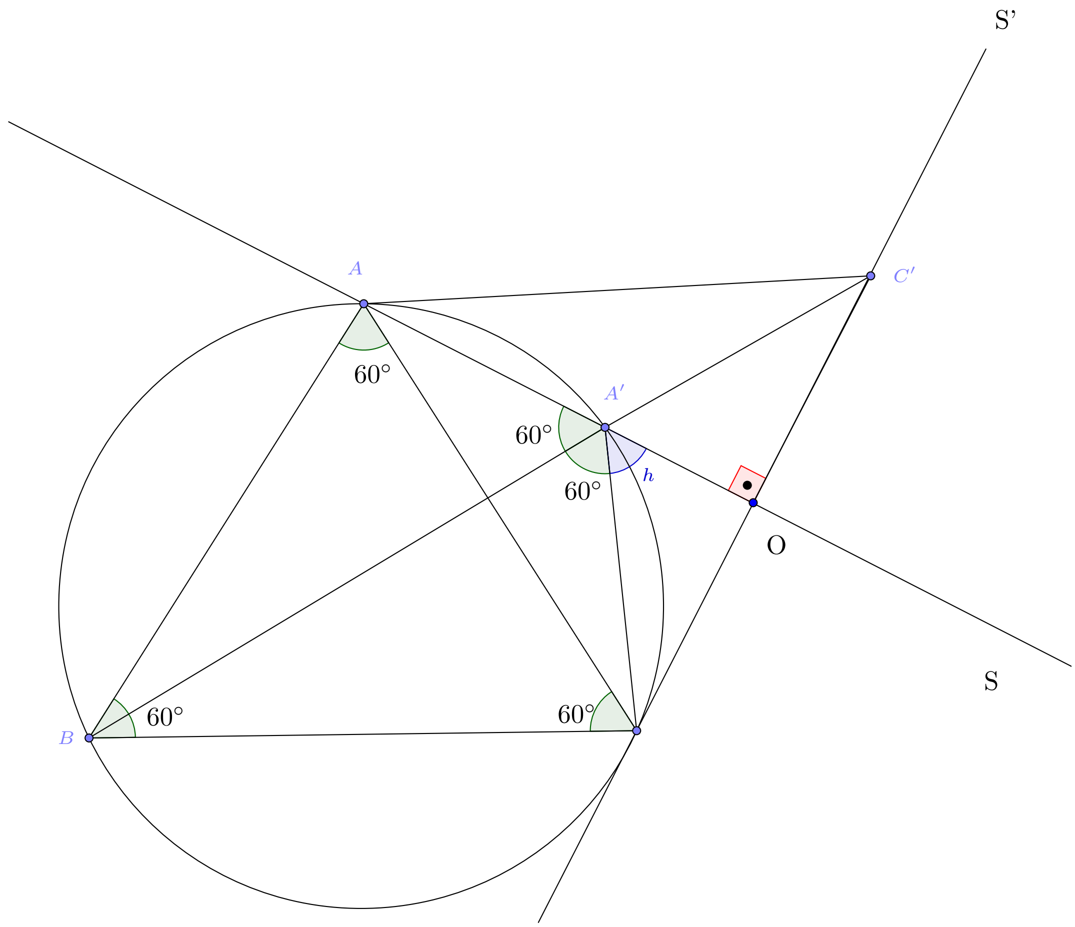


Veja que os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BA'C}$ enxergam o mesmo arco, portanto são iguais, logo $\widehat{BA'C} = 60°$. Podemos redesenhar a figura:



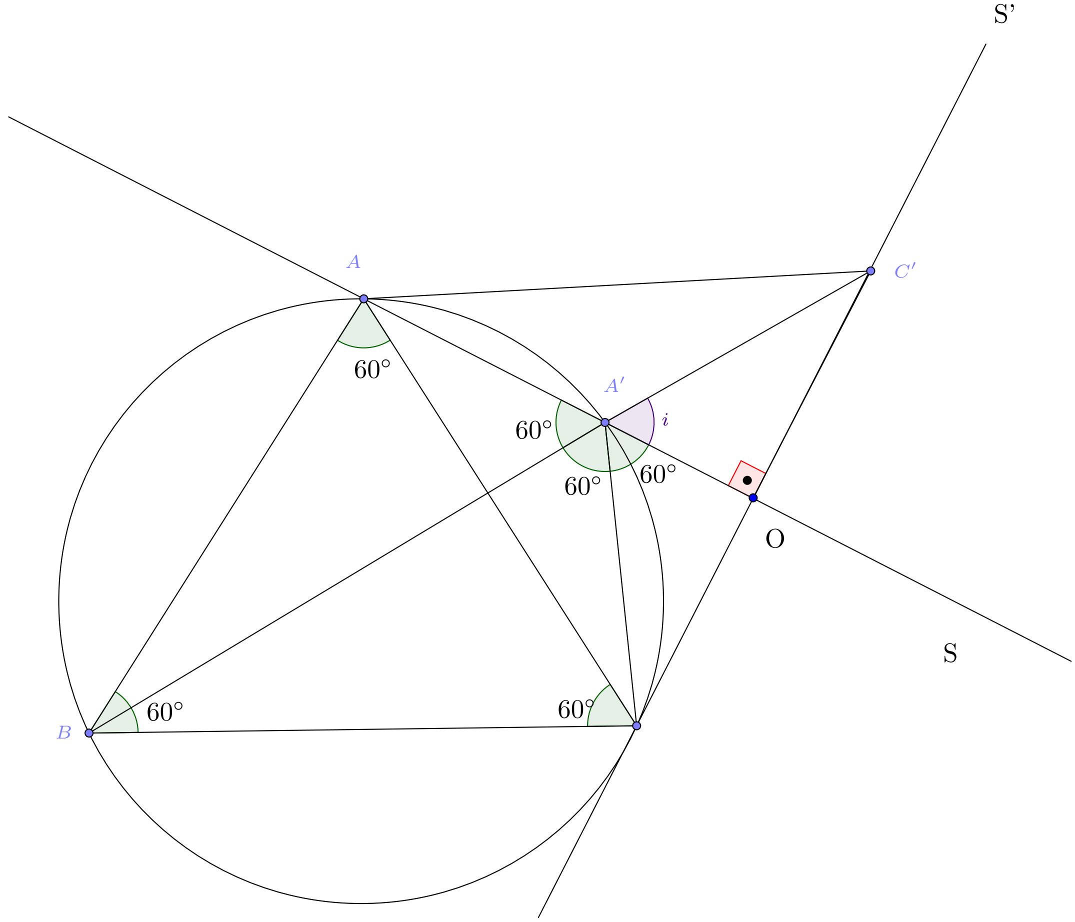
Note que o ângulo g enxerga o mesmo arco que o ângulo $\widehat{ACB}$, portanto, teremos:

$$g = 60^\circ$$

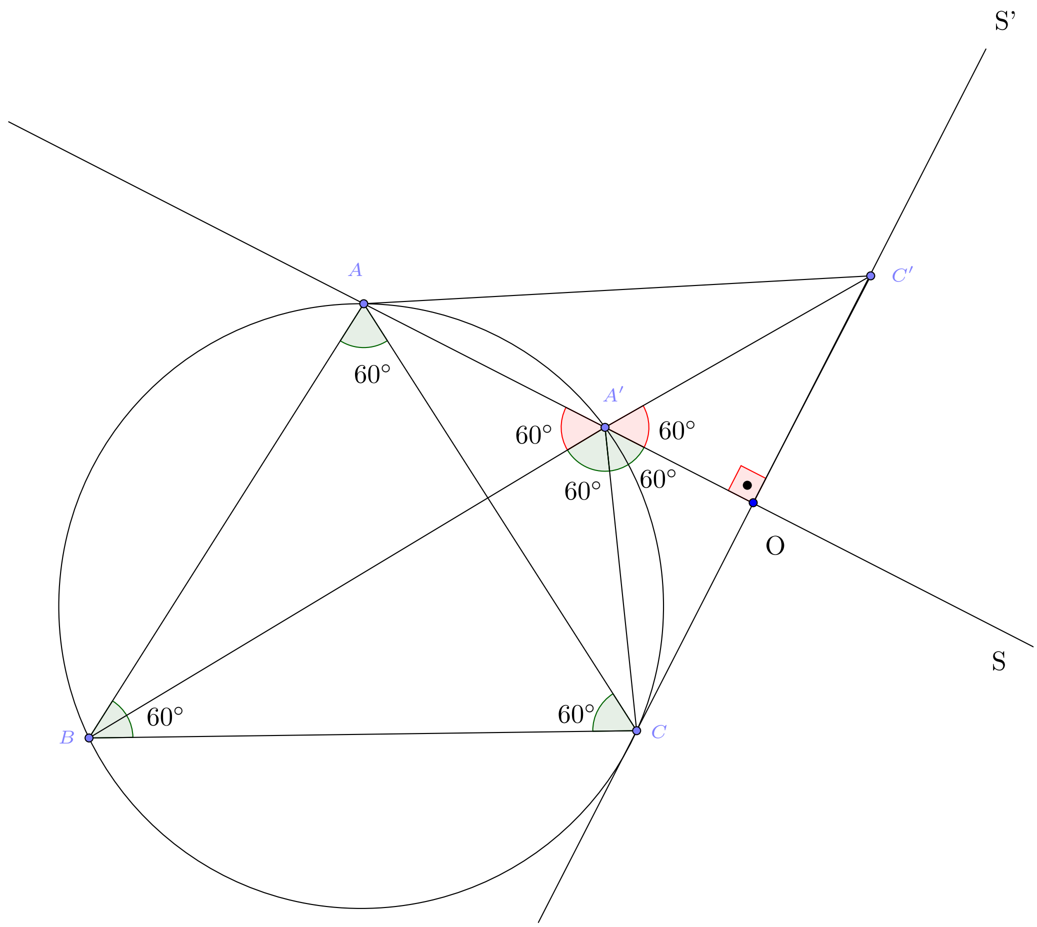


Vamos determinar o valor de h.Não é difícil ver que:

$$60^\circ + 60^\circ + h = 180^\circ$$
$$h = 60^\circ$$



Agora considere os triângulos A'OC e A'OC' .Como OC = OC' ,A'O é um lado comum a estes triângulos e , temos um ângulo de 90 entre estes lados , temos um caso de congruência LAL(lado ângulo lado), logo os triângulos A'OC e A'OC' são congruentes.O que implica que seus ângulos também são iguais, logo $i = 60^\circ$, então:



Note que a consequência imediata é que os dois ângulos de 60 (destacados em vermelho) são opostos pelo vértice, uma vez que a reta os unem partindo de um mesmo ponto.Logo os pontos B, A' e C' são colineares, ou seja, esses três pontos estão alinhados , ou ainda estão sobre uma mesma reta.O que implica que a distância BA+AC' é maior que BA'+A'C', uma vez que os segmentos BA'+A'C' formam uma única reta(a menor distância entre dois pontos é uma reta).Em linguagem algébrica $BA + AC' > BA' + A'C'$.

Sabemos que os triângulos A'CO e A'C'O são congruentes.Agora considere os triângulos AOC e AOC': como OC = OC' ,AO é um lado comum e , temos um ângulo de 90 entre estes lados , temos um caso de congruência LAL(lado ângulo lado), logo os triângulos AOC e AOC' também são congruentes . Como os triângulos AOC e AOC' são congruentes, então AC'= AC e como os triângulos A'CO e A'C'O são congruentes então A'C=A'C'.Logo, como $BA+AC' > BA'+A'C'$, e usando que A'C'= A'C e AC=AC', então $BA + AC > BA' + A'C$, ou seja a soma dos dois lados do triângulo equilátero é maior do que a soma dos dois lados (não comuns ao triângulo equilátero) do triângulo gerado pelo torção do vértice A. E podemos aplicar o mesmo raciocínio aos outros lados em direções diferentes, e chegar a este mesmo resultado. Portanto o triângulo de maior perímetro é o equilátero.

Talvez uma dúvida natural seja pensar que movimentamos apenas um dos vértices, enquanto existe a possibilidade de formar outro triângulo movimento dois vértices do triângulo equilátero, mas nós vamos provar que os triângulos obtidos por essa forma são menores do que o triângulo equilátero.Veja como podemos formar outros triângulos a partir do triângulo equilátero:

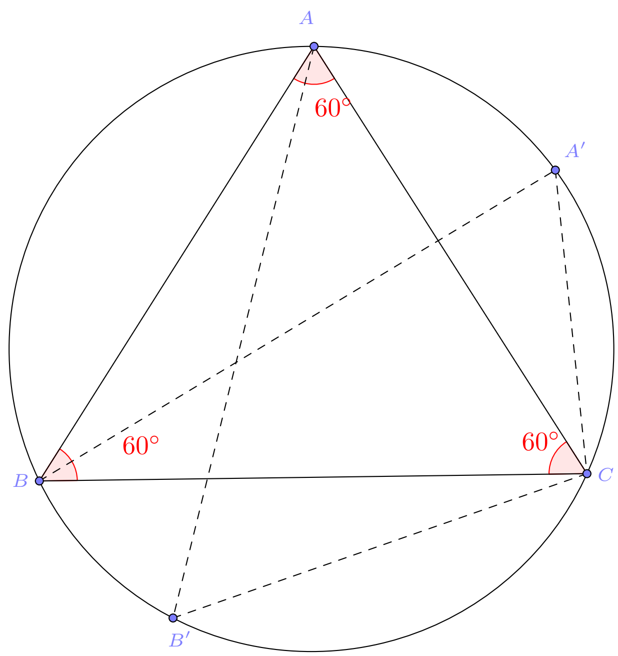


Figura 1

Na figura acima, movimentamos os vértices A e B e obtemos os vértices A' e B', gerando o triângulo A'B'C.Este é um exemplo de como podemos obter novos triângulos.Mas observe que ao movimentarmos os dois vértices temos uma composição de movimentos de um vértice, isto é, movimentar dois vértices é o mesmo que fazer dois movimentos de cada um de dois vértices.Note que na demonstração acima, já provamos:

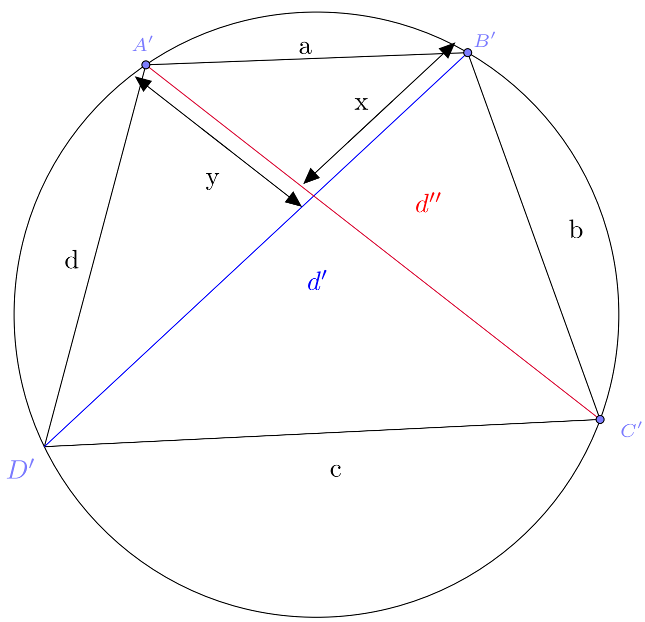
$$\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{A'B} + \overline{A'C} \tag{38}$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AB'} + \overline{B'C} \tag{39}$$

Somando as desigualdades (38) e (39), teremos:

$$(\overline{AB} + \overline{AC}) + (\overline{AB} + \overline{BC}) > (\overline{A'B} + \overline{A'C}) + (\overline{AB'} + \overline{B'C}) \qquad (40)$$

Seja um quadrilátero convexo inscritível, vamos provar que a soma de suas diagonais é maior do que a soma de quaisquer dois lados opostos.Seja o quadrilátero A'B'C'D', sejam a,b,c,d seus lados,d',d" suas diagonais, veja a figura:



Pela desigualdade triangular, temos:

$$(d'' - y) + x > b \qquad (41)$$

$$(d' - x) + y > d \qquad (42)$$

$$x + y > a \qquad (43)$$

$$(d' - x) + (d'' - y) > c \qquad (44)$$

Somando (41) com (42), e somando (43) com (44), tem-se o resultado desejado. Fixe agora a atenção na Figura 1, e considere o quadrilátero AA'B'B, como a soma de suas diagonais é maior do que a soma de quaisquer dois lados opostos teremos:

$$\overline{AB'} + \overline{A'B} > \overline{AB} + \overline{A'B'} \tag{45}$$

Somando A'C+B'C em ambos os lados da desigualdade acima, teremos:

$$\overline{A'B} + \overline{A'C} + \overline{AB'} + \overline{B'C} > \overline{A'C} + \overline{B'C} + \overline{AB} + \overline{A'B'} \tag{46}$$

Observe que o lado direito de (40) é o lado esquerdo de (46), sendo assim, usando transitividade, teremos:

$$(\overline{AB} + \overline{AC}) + (\overline{AB} + \overline{BC}) > \overline{A'C} + \overline{B'C} + \overline{AB} + \overline{A'B'} \tag{47}$$

Subtraindo AB nos dois lados da desigualdade acima, teremos:

$$\overline{AC} + \overline{AB} + \overline{BC} > \overline{A'C} + \overline{B'C} + \overline{A'B'} \tag{48}$$

Provando assim que o perímetro do triângulo equilátero é maior do que o triângulo formado pela torção de dois vértices em sentidos opostos...Agora nos resta analisar o caso em que movimentamos dois vértices no mesmo sentido(horário ou anti-horário, os dois casos são análogos).Para este caso, vamos abrir em duas possibilidades, veja a figura abaixo:

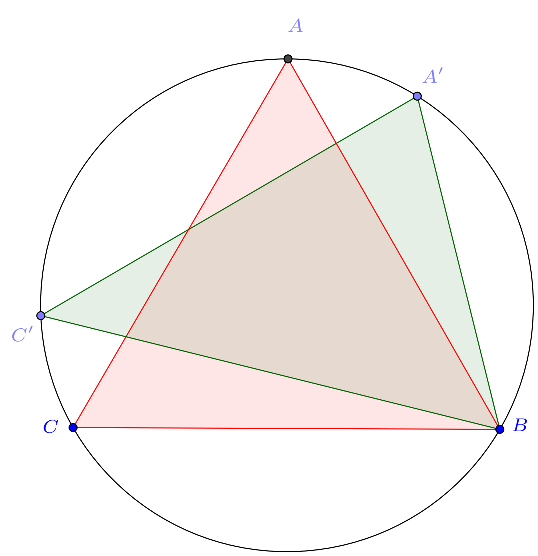
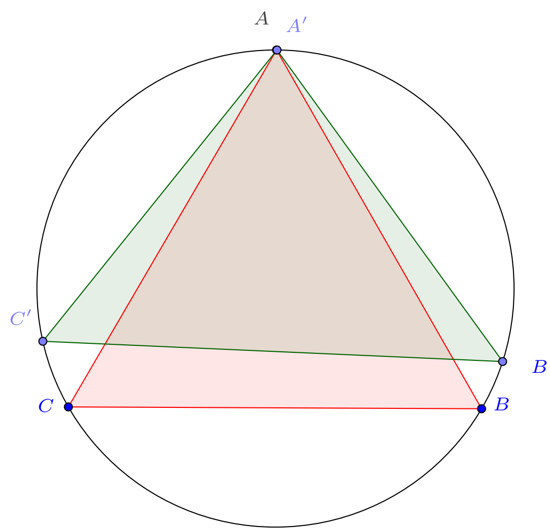


Figura 2

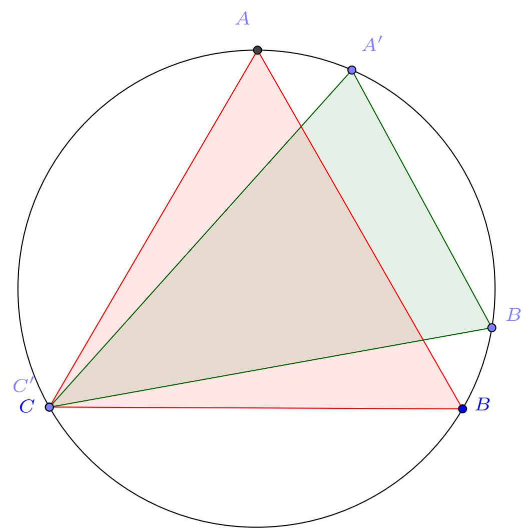
O primeiro caso é o caso em que o arco CC' é maior do que AA', o segundo caso, é o caso contrário, isto é, o caso em que o arco AA' é maior do que CC'.

Analisemos o primeiro caso.Quando CC' é maior do que AA', se rotacionarmos o triângulo A'BC'(rotação em torno do centro da circunferência) no sentido anti-horário, de modo que o vértice A' se sobreponha ao vértice A, teremos o mesmo caso anterior, veja a figura:

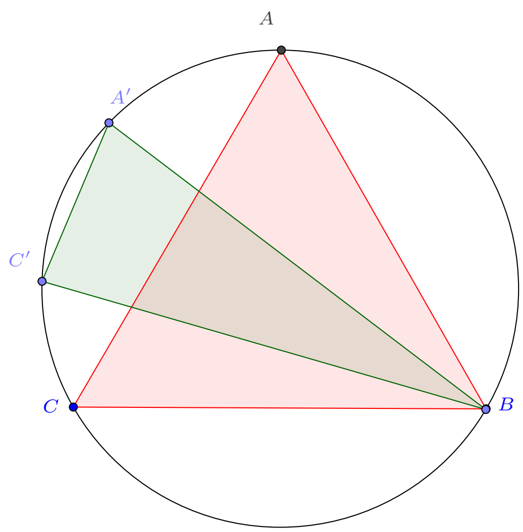


Note que o triângulo A'C'B da figura está na mesma posição que o triângulo A'C'B da figura 1(o que muda é que está rotacionado, mas é o mesmo caso, isto é, o caso em que o arco C'B é maior do que o arco CB, isto acontece devido ao fato de ao rotacionarmos o triângulo A'C'B a distância percorrida pelo vértice A' até chegar ao vértice A é menor que a distância percorrida pelo vértice C' até se sobrepor ao vértice C).

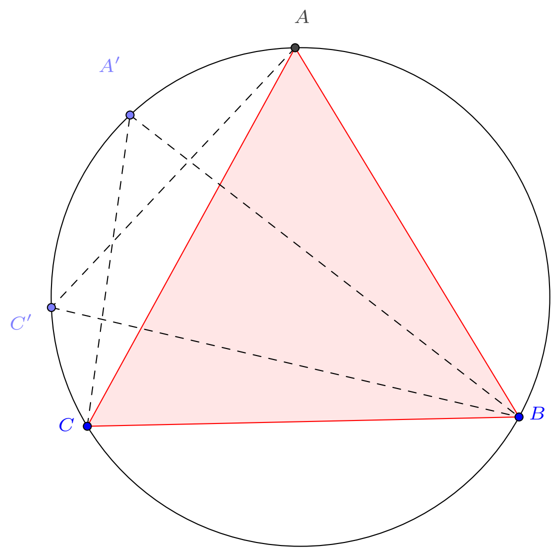
Considere agora o segundo caso, isto é, o caso em que CC' é menor do que AA'.Se rotacionarmos o triângulo A'C'B da figura 2, em torno do centro da circunferência, de modo que o ponto C' se sobreponha ao ponto C, como a distância percorrida por C' até chegar a C é menor do que a distância por A' até chegar A, teremos uma figura do tipo abaixo:



Isto é, a consequência imediata desse caso é que o arco A'B será menor e estará "dentro" do arco AB. Vamos provar que nesse caso o triângulo formado será menor.Para isso, considere a figura abaixo:



Vamos ocultar o triângulo verde, e destacar algumas retas, veja:



Mas já provamos que:

$$\overline{AC} + \overline{AB} > \overline{A'C} + \overline{A'B} \tag{49}$$

$$\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AC'} + \overline{BC'} \tag{50}$$

Somando essas duas equações obtemos:

$$\overline{AC} + \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AC'} + \overline{BC'} + \overline{A'C} + \overline{A'B} \tag{51}$$

Mas já provamos que a soma das diagonais de um quadrilátero convexo é maior que a soma de quaisquer dois lados opostos desse quadrilátero, observando o quadrilátero A'ACC', teremos a seguinte relação:

$$\overline{A'C} + \overline{AC'} > \overline{A'C'} + \overline{AC} \tag{52}$$

Somando BC'+A'B na desigualdade acima, teremos:

$$\overline{AC'} + \overline{BC'} + \overline{A'C} + \overline{A'B} > \overline{A'C'} + \overline{AC} + \overline{BC'} + \overline{A'B} \tag{53}$$

Observe que o lado direito de (51) é o lado esquerdo de (53), sendo assim, por transitividade, teremos:

$$\overline{AC} + \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} > \overline{A'C'} + \overline{AC} + \overline{BC'} + \overline{A'B} \tag{54}$$

Subtraindo AC nos dois lados da desigualdade acima, finalmente teremos:

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} > \overline{A'C'} + \overline{BC'} + \overline{A'B} \tag{55}$$

Finalizando assim, todos os casos possíveis...

Sendo isso verdade,considere que pela lei dos senos, sabemos que:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R \Rightarrow senA = \frac{a}{2R}; senB = \frac{b}{2R}; senC = \frac{c}{2R};$$

Somando os senos, concluímos:

$$senA + senB + senC = \frac{a+b+c}{2R}$$

Mas a+b+c nada mais é do que o perímetro do triângulo inscrito na circunferência, e sabemos que o maior triângulo passível de ser escrito na circunferência é o equilátero, chamando de l o lado do triângulo equilátero teremos a=b=c=l, e como o raio da circunferência é constante, teremos:

$$senA + senB + senC \leq \frac{3l}{2R}$$

Como no triângulo equilátero é válido a relação $R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$, finalmente chega-se ao resultado.

Solução 2: Use a concavidade da função seno e aplique a desigualdade de Jensen.

Solução 3:

Considere que:

$$sen\alpha + sen\beta + sen\gamma = 2sen\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} + sen\gamma \leq 2sen\frac{\alpha+\beta}{2} + sen\gamma =$$
$$2cos\frac{\gamma}{2} + sen\gamma = 2cos\frac{\gamma}{2} + 2cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{1-cos^2\frac{\gamma}{2}} = 2x + 2x\sqrt{1-x^2}$$

Basta maximizar a função ao lado direito usando derivadas.

Solução 4: Veja página 215.

13. ("103 Trigonometry Problems from the training of the USA IMO Team"-Titu Andreescu) Let x, y,z be positive real numbers.Prove that:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

if x+y+z=xyz.

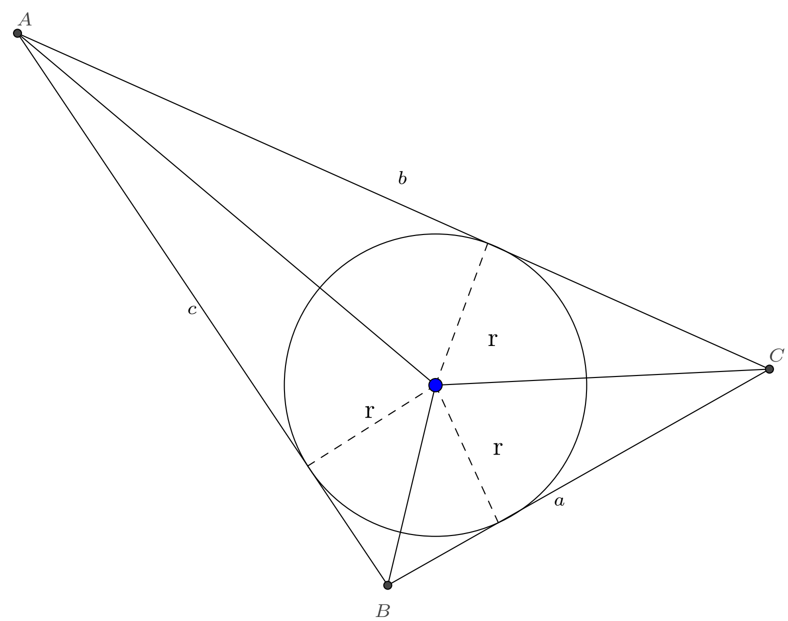
Solução 1: Substitua x=tanA,y=tanB e z=tanC, vê-se que A,B e C são ângulos de um triângulo, ao fazer essa substituição recaímos na desigualdade anterior, que sabemos ser verdadeira para ângulos de um triângulo.

14. (Euler's Inequality-Desigualdade de Euler)Seja r o raio da circunferência inscrita ao triângulo, seja R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, prove que:

$$2r \leq R$$

Solução:

Considere a circunferência inscrita ao triângulo abaixo:



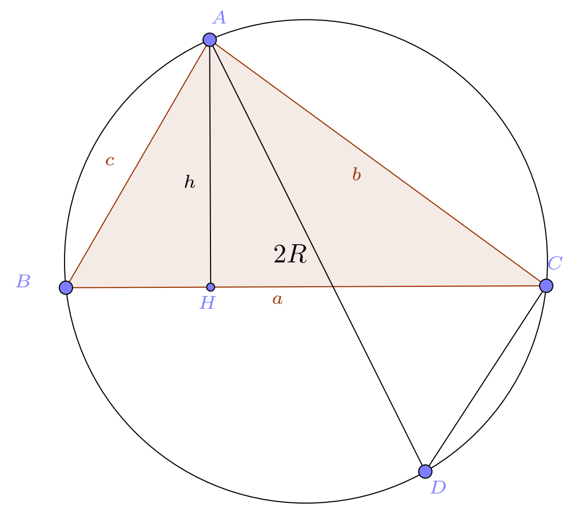
Observe que a soma das áreas dos triângulos formados pela união do centro da circunferência inscrita com os vértices do triângulo é igual a área do triângulo total,sendo assim teremos:

$$A = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$$

De onde conluímos a primeira relação:

$$A = \frac{(a+b+c)r}{2} \tag{56}$$

Considere agora o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio R. Seja AH = h uma altura e seja AD um diâmetro dessa circunferência.



Os triângulos AHB e ACD são semelhantes uma vez que os ângulos AHB e ACD são retos e os ângulos ABC e ADC são iguais pois subtendem o mesmo arco.De onde conluímos a razão de semelhança:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC}$$

$$\frac{c}{2R} = \frac{h}{b}$$

ou seja, bc = 2Rh. Multiplicando pelo comprimento do lado BC os dois lados, temos abc = 2Rah. Mas ah é o dobro da área do triângulo ABC e assim encontramos a nossa segunda relação :

$$abc = 4RA \tag{57}$$

As equações (56) e (57) são duas relações importantes que envolvem um triângulo e as circunferências inscritas e circunscritas.

Substituindo (56) em (57), teremos:

$$abc = \frac{4Rr(a+b+c)}{2}$$

$$\frac{abc}{a+b+c} = 2rR \tag{58}$$

Considere que pela desigualdade das médias, temos:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Elevando ao cubo, teremos:

$$\frac{(a+b+c)^3}{27} \geq abc$$

De onde podemos concluir que:

$$\frac{abc}{(a+b+c)} \leq \frac{(a+b+c)^2}{27} \tag{59}$$

Mas sabemos que a+b+c é o perímetro do triângulo, e também sabemos que o perímetro do triângulo inscrito é máximo quando o triângulo é equilátero, se denotarmos o lado do triângulo equilátero por l, sabemos $l = R\sqrt{3}$, de onde podemos ver facilmente que $a + b + c \leq 3R\sqrt{3} \Rightarrow (a + b + c)^2 \leq 27R^2 \Rightarrow \frac{(a+b+c)^2}{27} \leq R^2$, aplicando em (59), teremos:

$$\frac{abc}{(a+b+c)} \leq \frac{(a+b+c)^2}{27} \leq R^2 \tag{60}$$

Finalmente concluímos que:

$$\frac{abc}{(a+b+c)} \leq R^2 \tag{61}$$

Usando (58) em (61):

$$2rR = \frac{abc}{(a+b+c)} \leq R^2$$
$$2r \leq R$$

15. Prove que o triângulo de maior área que se pode inscrever na circunferência é o equilátero.

Solução:

Seja A a área de um triângulo inscrito na circunferência.Pela equação (56), usando que $2r \leq R$, e que $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$, multiplicando as duas desigualdades anteriores teremos:

$$4A = 2r(a + b + c) \leq 3R^2\sqrt{3} \Rightarrow 4A \leq 3R^2\sqrt{3} \Rightarrow A \leq \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

Como o majorante encontrado para a área é a própria área do triângulo equilátero, fica provado assim o resultado.Mas nesse caso podemos afirmar que a desigualdade é estrita se o triângulo não é equilátero, pois a igualdade ocorre apenas se o triângulo for equilátero, já que nas duas desigualdades aplicadas, a igualdade só ocorre nesse caso ...

16. ("Simple trigonometric substitutions with broad results"-Vardan Verdiyan e Daniel Campos Salas)Let a, b, c be a positive real numbers such that $a + b + c = 1$.Prove that:

$$\sqrt{\frac{1}{a}-1}\sqrt{\frac{1}{b}-1}+\sqrt{\frac{1}{a}-1}\sqrt{\frac{1}{c}-1}+\sqrt{\frac{1}{b}-1}\sqrt{\frac{1}{c}-1}\geq 6$$

Solução Faça a substituição:

$$x=\sqrt{\frac{bc}{a}};y=\sqrt{\frac{ac}{b}};z=\sqrt{\frac{ab}{c}};$$

Observe que essa substituição nos leva a $yz = a, xz = b, xy = c$, concluindo assim que:

$$a+b+c=1\Rightarrow xy+xz+yz=1$$

De onde podemos ver que x,y e z são tangentes com argumentos cujo valor são metade dos ângulos de um triângulo.Substituindo na desigualdade teremos:

$$\sqrt{\frac{1}{yz}-1}\sqrt{\frac{1}{xz}-1}+\sqrt{\frac{1}{yz}-1}\sqrt{\frac{1}{xy}-1}+\sqrt{\frac{1}{xz}-1}\sqrt{\frac{1}{xy}-1}\geq 6$$

$$\sqrt{cot\frac{\beta}{2}cot\frac{\gamma}{2}-1}\sqrt{cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\gamma}{2}-1}+\sqrt{cot\frac{\beta}{2}cot\frac{\gamma}{2}-1}\sqrt{cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\beta}{2}-1}+$$
$$\sqrt{cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\gamma}{2}-1}\sqrt{cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\beta}{2}-1}\geq 6$$

Por transformações trigonométricas triviais, é possível ver que a desigualdade acima é equivalente a:

$$csc\frac{\alpha}{2}+csc\frac{\beta}{2}+csc\frac{\gamma}{2}\geq 6$$

Agora nos resta provar a desigualdade acima.Considere que pela desigualdade que relaciona as médias harmônica e aritmética, segue que:

$$\frac{csc\frac{\alpha}{2}+csc\frac{\beta}{2}+csc\frac{\gamma}{2}}{3}\geq\frac{3}{sen\frac{\alpha}{2}+sen\frac{\beta}{2}+sen\frac{\gamma}{2}} \tag{62}$$

Sabemos pela desigualdade 1 que:

$$sen\frac{\alpha}{2}+sen\frac{\beta}{2}+sen\frac{\gamma}{2}\leq\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{3}{sen\frac{\alpha}{2}+sen\frac{\beta}{2}+sen\frac{\gamma}{2}}\geq 2$$

Aplicando a desigualdade acima a desigualdade (62), por transitividade chega-se ao resultado.A desigualdade acima também pode ser provada pela desigualdade de Jensen em 3 variáveis, basta fazer $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{3}$.

17. (Desafio/Somatórios-Filipe Moreira/Instituto Tecnológico de Aeronáutica-ITA-SP)Calcule por pertubação de somatórios $\sum_{k=1}^{n} sen(kx)$.

Solução: Vou calcular algo muito mais forte usando pertubação de somatórios, vou calcular a soma abaixo:

$$sen(\phi+\theta)+sen(\phi+2\theta)+sen(\phi+3\theta)+...+sen(\phi+n\theta)=\sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta)$$

Ora, a soma do problema é uma caso particular da soma acima, basta fazer $\phi=0$ na soma acima e teremos a soma do problema.Veja o que podemos fazer:

$$\sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta)+sen(\phi+(n+1)\theta)=\sum_{k=0}^{n} sen(\phi+(k+1)\theta)= \sum_{k=1}^{n} sen(\phi+(k+1)\theta)+sen(\phi+\theta)=\sum_{k=1}^{n}(sen(\phi+k\theta)cos(\theta)+cos(\phi+k\theta)sen(\theta))+ sen(\phi+\theta)=cos(\theta)\sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta)+sen(\theta)\sum_{k=1}^{n} cos(\phi+k\theta)+sen(\phi+\theta)\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta)+sen(\phi+(n+1)\theta)=cos(\theta)\sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta)+sen(\theta)\sum_{k=1}^{n} cos(\phi+ k\theta)+sen(\phi+\theta)\Rightarrow(1-cos(\theta))\sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta)+sen(\phi+(n+1)\theta)-sen(\phi+ \theta)=sen(\theta)\sum_{k=1}^{n} cos(\phi+k\theta)\Rightarrow\sum_{k=1}^{n} cos(\phi+k\theta)=\frac{(1-cos(\theta))}{sen(\theta)}\sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta)+ \frac{sen(\phi+(n+1)\theta)-sen(\phi+\theta)}{sen(\theta)}$$

Concluímos assim a primeira e importante igualdade:

$$\sum_{k=1}^{n} cos(\phi+k\theta)=\frac{(1-cos(\theta))}{sen(\theta)}\sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta)+\frac{sen(\phi+(n+1)\theta)-sen(\phi+\theta)}{sen(\theta)} \tag{63}$$

Considere agora o desenvolvimento:

$$\sum_{k=1}^{n} cos(\phi+k\theta)+cos(\phi+(n+1)\theta)=\sum_{k=0}^{n} cos(\phi+(k+1)\theta)= \sum_{k=1}^{n} cos(\phi+(k+1)\theta)+cos(\phi+\theta)=\sum_{k=1}^{n}(cos(\phi+k\theta)cos(\theta)-sen(\phi+k\theta)sen(\theta))+ cos(\phi+\theta)=cos(\theta)\sum_{k=1}^{n} cos(\phi+k\theta)-sen(\theta)\sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta)+cos(\phi+\theta)\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} cos(\phi+k\theta)+cos(\phi+(n+1)\theta)=cos(\theta)\sum_{k=1}^{n} cos(\phi+k\theta)-sen(\theta)\sum_{k=1}^{n} sen(\phi+$$

$k\theta) + cos(\phi + \theta) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} cos(\phi + k\theta) + cos(\phi + (n+1)\theta) - cos(\theta) \sum_{k=1}^{n} cos(\phi + k\theta) =$
$-sen(\theta) \sum_{k=1}^{n} sen(\phi + k\theta) + cos(\phi + \theta) \Rightarrow (1 - cos(\theta)) \sum_{k=1}^{n} cos(\phi + k\theta) + cos(\phi +$
$(n+1)\theta) = -sen(\theta) \sum_{k=1}^{n} sen(\phi + k\theta) + cos(\phi + \theta)$

Concluímos assim a segunda e importante igualdade:

$$(1-cos(\theta)) \sum_{k=1}^{n} cos(\phi+k\theta)+cos(\phi+(n+1)\theta) = -sen(\theta) \sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta)+cos(\phi+\theta) \tag{64}$$

Substituindo (63) em (64), teremos:

$$(1-cos(\theta)) \left(\frac{(1-cos(\theta))}{sen(\theta)} \sum_{k=1}^{n} sen(\phi + k\theta) + \frac{sen(\phi + (n+1)\theta) - sen(\phi + \theta)}{sen(\theta)} \right) +$$
$$cos(\phi + (n+1)\theta) = -sen(\theta) \sum_{k=1}^{n} sen(\phi + k\theta) + cos(\phi + \theta)$$
$$\Rightarrow \frac{(1-cos(\theta))^2}{sen(\theta)} \sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta) + (1-cos(\theta)) \frac{sen(\phi + (n+1)\theta) - sen(\phi + \theta)}{sen(\theta)} +$$
$$cos(\phi + (n+1)\theta) = -sen(\theta) \sum_{k=1}^{n} sen(\phi + k\theta) + cos(\phi + \theta)$$

Multiplicando os dois lados por $sen(\theta)$, vem:

$$\Rightarrow (1 - cos(\theta))^2 \sum_{k=1}^{n} sen(\phi + k\theta) + (1 - cos(\theta))(sen(\phi + (n+1)\theta) - sen(\phi + \theta)) +$$
$$sen(\theta)cos(\phi + (n+1)\theta) = -sen^2(\theta) \sum_{k=1}^{n} sen(\phi + k\theta) + sen(\theta)cos(\phi + \theta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((1 - cos(\theta))^2 + sen^2(\theta)) \sum_{k=1}^{n} sen(\phi + k\theta) + (1 - cos(\theta))(sen(\phi + (n+1)\theta) -$$
$$sen(\phi + \theta)) + sen(\theta)cos(\phi + (n+1)\theta) = sen(\theta)cos(\phi + \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - 2cos(\theta) + cos^2(\theta) + sen^2(\theta)) \sum_{k=1}^{n} sen(\phi + k\theta) +$$
$$+ (1 - cos(\theta))(sen(\phi + (n+1)\theta) - sen(\phi + \theta)) + sen(\theta)cos(\phi + (n+1)\theta) = sen(\theta)cos(\phi + \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 - 2cos(\theta)) \sum_{k=1}^{n} sen(\phi + k\theta) = sen(\theta)cos(\phi + \theta)$$
$$- ((1 - cos(\theta))(sen(\phi + (n+1)\theta) - sen(\phi + \theta)) - sen(\theta)cos(\phi + (n+1)\theta) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (2-2cos(\theta))\sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta) =$
$sen(\theta)cos(\phi+\theta) - sen(\phi+(n+1)\theta) + sen(\phi+\theta) + cos(\theta)sen(\phi+(n+1)\theta) - cos(\theta)sen(\phi+\theta) - sen(\theta)cos(\phi+(n+1)\theta)$

Observe que
$sen(\theta)cos(\phi+\theta) - cos(\theta)sen(\phi+\theta) = -(cos(\theta)sen(\phi+\theta) - sen(\theta)cos(\phi+\theta)) = -sen(\phi+\theta-\theta) = -sen(\phi)$, veja também que:
$cos(\theta)sen(\phi+(n+1)\theta) - sen(\theta)cos(\phi+(n+1)\theta) = sen(\phi+(n+1)\theta-\theta) = sen(\phi+n\theta)$

Substituindo teremos:

$$(2-2cos(\theta))\sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta) = -sen(\phi+(n+1)\theta)+sen(\phi+\theta)+sen(\phi+n\theta)-sen(\phi) \tag{65}$$

Considere que $sen(\phi+\theta)-sen(\phi+(n+1)\theta) = -(sen(\phi+(n+1)\theta)-sen(\phi+\theta)) = -2sen\left(\frac{n\theta}{2}\right)cos\left(\frac{2\phi+(n+2)\theta}{2}\right)$ e também
$sen(\phi+n\theta) - sen(\phi) = 2sen\left(\frac{n\theta}{2}\right)cos\left(\frac{2\phi+n\theta}{2}\right)$
Substituindo as igualdades anteriores em (65) teremos:

$$(2-2cos(\theta))\sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta) = -2sen\left(\frac{n\theta}{2}\right)cos\left(\frac{2\phi+(n+2)\theta}{2}\right)+2sen\left(\frac{n\theta}{2}\right)cos\left(\frac{2\phi+n\theta}{2}\right) \tag{66}$$

Colocando os senos em evidência em (66) e usando que $cos\left(\frac{2\phi+n\theta}{2}\right)-cos\left(\frac{2\phi+(n+2)\theta}{2}\right) = -2sen\left(-\frac{\theta}{2}\right)sen\left(\phi+\frac{(n+1)\theta}{2}\right) = 2sen\left(\frac{\theta}{2}\right)sen\left(\phi+\frac{(n+1)\theta}{2}\right)$(lembre-se o seno é uma função ímpar), substituindo em (66) teremos:

$$(2-2cos(\theta))\sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta) = 4sen\left(\frac{n\theta}{2}\right)sen\left(\frac{\theta}{2}\right)sen\left(\phi+\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \tag{67}$$

Agora, observe que:
$2-2cos(\theta) = 2-2\left(1-2sen^2\frac{\theta}{2}\right) = 4sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, substituindo em (67), teremos:
$4sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sum_{k=1}^{n} sen(\phi+k\theta) = 4sen\left(\frac{n\theta}{2}\right)sen\left(\frac{\theta}{2}\right)sen\left(\phi+\frac{(n+1)\theta}{2}\right)$
Passando o seno ao quadrado dividindo teremos o resultado desejado[5]

[5] É fácil generalizar esse resultado para o cosseno, ou para o seno ao quadrado ou cosseno

18. Prove a desigualdade 7 desse artigo.

Solução: Pela desigualdade das médias temos:

$$(yz)^2 + (xz)^2 \geq 2xyz^2 \tag{68}$$

$$(yz)^2 + (xy)^2 \geq 2xy^2z \tag{69}$$

$$(xz)^2 + (xy)^2 \geq 2x^2yz \tag{70}$$

Somando (68) (69) e (70), teremos:

$$(xz)^2 + (xy)^2 + (yz)^2 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2 \tag{71}$$

Observe que $(xz)^2+(xy)^2+(yz)^2 = (xy+xz+yz)^2-(2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2)$, substituindo em (71) teremos:

$$(xy + xz + yz)^2 \geq 3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2 \tag{72}$$

Tome $xy + xz + yz = 1$, note que por essa substituição x,y e z são tangentes com argumentos que são metade de ângulos de um triângulo.Sendo assim, teremos:

$$1 \geq 3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2 \tag{73}$$

Veja o que podemos fazer com isso:

$$\begin{aligned}
&1 \geq 3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 1 - (x^2yz + xy^2z + xyz^2) \geq 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow xy + xz + yz - (x^2yz + xy^2z + xyz^2) \geq 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow xy(1 - z^2) + xz(1 - y^2) + yz(1 - x^2) \geq 2xyz(x + y + z)
\end{aligned}$$

Dividindo os dois lados por $2xyz$, teremos:

$$\frac{1 - z^2}{2z} + \frac{1 - y^2}{2y} + \frac{1 - x^2}{2x} \geq x + y + z \tag{74}$$

Fazendo $x = tan\dfrac{\alpha}{2}, y = tan\dfrac{\beta}{2}, z = tan\dfrac{\gamma}{2}$ e usando que $tan2x = \dfrac{2tanx}{1 - tan^2x} \Rightarrow cot2x = \dfrac{1 - tan^2x}{2tanx}$, substituindo em (74) teremos:

$$cot\alpha + cot\beta + cot\gamma \geq tan\frac{\alpha}{2} + tan\frac{\beta}{2} + tan\frac{\gamma}{2}$$

O lado direito pode ser usado a Desigualdade de Jensen ou mesmo a desigualdade das médias, por ser muito óbvia, vou omitir a demonstração.

ao quadrado, bastando apenas aplicar algumas transformações trigonométricas triviais, nos dois últimos casos.

19.(IMO)Sejam a,b,c os lados do triângulo e A sua área, prove que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$$

Solução 1 Defina uma função:

$$f(a,b,c) = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Onde a,b,c são lados de um triângulo. Suponha por absurdo, que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{3}{R\sqrt{3}} \tag{75}$$

Usando que:

$$a + b + c \leq 3R\sqrt{3} \tag{76}$$

Multiplicando (75) e (76):

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) < 9$$

O que é absurdo, isto pode ser visto usando a desigualdade que relaciona a média aritmética com a média harmônica, ou pela desigualdade de Cauchy-Schwarz.De onde concluímos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{R\sqrt{3}} \tag{77}$$

Pela desigualdade (77) e por (57), temos:

$$ab + ac + bc \geq \frac{\sqrt{3}abc}{R}$$

$$ab + ac + bc \geq 4A\sqrt{3}$$

Usando que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ segue o resultado.

Solução 2:

Essa solução é um pouco mais longa.Nessa solução vou provar que essa desigualdade é equivalente a desigualdade 7, usando outros argumentos.Substituindo a fórmula de Heron, teremos:

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $\sqrt{\left(\dfrac{a+b+c}{2abc}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{S}{abc}\right)^2}$, obtemos:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{a+b+c}{2abc}\right) \geq 4\sqrt{3}\sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}\frac{S(S-b)}{ac}\frac{S(S-c)}{ab}}$$

Usando a relação (24) e (25), temos:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{a+b+c}{2abc}\right) \geq 4\sqrt{3}cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b^2}{ac}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{c^2}{ab}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right) \geq 8\sqrt{3}cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\left(\frac{sen^2\alpha}{sen\beta sen\gamma}+\frac{sen\alpha}{sen\beta}+\frac{sen\alpha}{sen\gamma}\right)+\left(\frac{sen^2\beta}{sen\alpha sen\gamma}+\frac{sen\beta}{sen\alpha}+\frac{sen\beta}{sen\gamma}\right)+\left(\frac{sen^2\gamma}{sen\alpha sen\beta}+\frac{sen\gamma}{sen\alpha}+\frac{sen\gamma}{sen\beta}\right)$$
$$\geq 8\sqrt{3}cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$$

$$(sen\alpha+sen\beta+sen\gamma)\left(\frac{sen\alpha}{sen\beta sen\gamma}+\frac{sen\beta}{sen\alpha sen\gamma}+\frac{sen\gamma}{sen\alpha sen\beta}\right)$$
$$\geq 8\sqrt{3}cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$$

$$4cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}\left(\frac{sen\alpha}{sen\beta sen\gamma}+\frac{sen\beta}{sen\alpha sen\gamma}+\frac{sen\gamma}{sen\alpha sen\beta}\right) \geq 8\sqrt{3}cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{sen\alpha}{sen\beta sen\gamma}+\frac{sen\beta}{sen\alpha sen\gamma}+\frac{sen\gamma}{sen\alpha sen\beta} \geq 2\sqrt{3}$$

$$\frac{sen(\beta+\gamma)}{sen\beta sen\gamma}+\frac{sen(\alpha+\gamma)}{sen\alpha sen\gamma}+\frac{sen(\beta+\alpha)}{sen\alpha sen\beta} \geq 2\sqrt{3}$$

$$2cot\alpha+2cot\beta+2cot\gamma \geq 2\sqrt{3}$$

$$cot\alpha+cot\beta+cot\gamma \geq \sqrt{3}$$

Solução 3:

Aqui vai uma demonstração elementar dessa desigualdade(sem usar uma desigualdade auxiliar).Seja R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, α, β, γ os ângulos agudos opostos aos lados a, b, c, então sabemos que $A = \dfrac{abc}{4R}$, $\dfrac{c}{2R} = sen\gamma \Rightarrow \dfrac{2R}{c} = \dfrac{1}{sen\gamma}$ e também pela lei dos cossenos que $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma \Rightarrow cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, daí segue que:

$$a^2+b^2-c^2 = \frac{4Rabc(a^2+b^2-c^2)}{4Rabc} = \frac{4AR(a^2+b^2-c^2)}{abc} = 4A\times\frac{2R}{c}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 4Acot\gamma = 4A\sqrt{cot^2\gamma} = 4A\sqrt{csc^2\gamma-1} = 4A\sqrt{\frac{4R^2}{c^2}-1} = 4A\sqrt{\frac{4a^2b^2R^2}{a^2b^2c^2}-1} = 4A\sqrt{\frac{a^2b^2}{4\left(\frac{abc}{4R}\right)^2}-1} = 4A\sqrt{\frac{a^2b^2}{4A^2}-1} = 2\sqrt{4A^2\left(\frac{a^2b^2}{4A^2}-1\right)} = 2\sqrt{a^2b^2-4A^2} \Rightarrow$$
$$a^2+b^2-c^2 = 2\sqrt{a^2b^2-4A^2}$$

Por simetria concluímos as igualdades abaixo:

$$2\sqrt{a^2b^2-4A^2} = a^2+b^2-c^2$$

$$2\sqrt{a^2c^2-4A^2} = a^2+c^2-b^2$$

$$2\sqrt{b^2c^2-4A^2} = b^2+c^2-a^2$$

Multiplicando essas igualdades duas a duas teremos:

$$4\sqrt{a^2b^2-4A^2}\sqrt{b^2c^2-4A^2} = (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)$$

$$4\sqrt{a^2c^2-4A^2}\sqrt{b^2c^2-4A^2} = (a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)$$

$$4\sqrt{a^2b^2-4A^2}\sqrt{a^2c^2-4A^2} = (a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$$

Usando que o quadrado de todo número real é positivo segue que $m+n \geq 2\sqrt{mn}$, temos:

$$2(a^2b^2-4A^2+b^2c^2-4A^2) \geq (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)$$

$$2(a^2c^2-4A^2+b^2c^2-4A^2) \geq (a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)$$

$$2(a^2b^2-4A^2+a^2c^2-4A^2) \geq (a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$$

Somando todas as desigualdades acima teremos:

$$4a^2b^2+4b^2c^2+4a^2c^2-16\times 3A^2 \geq (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)+(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)+(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)$$

Seja $b^2+c^2-a^2 = x, y = a^2+c^2-b^2, z = a^2+b^2-c^2$.Observe que $2a^2 = (a^2+c^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2) = y+z$, $2b^2 = (a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2) = x+z$, $2c^2 = (a^2+c^2-b^2)+(b^2+c^2-a^2) = x+y$, sendo assim temos $4a^2b^2 = (y+z)(x+z)$, $4a^2c^2 = (y+z)(x+y)$, $4b^2c^2 = (x+z)(x+y)$, substituindo na desigualdade acima, temos:

$$(x+z)(x+y)+(x+y)(y+z)+(y+z)(x+z)-16\times 3A^2 \geq xy+xz+yz$$

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-16\times 3A^2 \geq 0$$

$$(x+y+z)^2-16\times 3A^2 \geq 0$$

$$x+y+z \geq 4\sqrt{3}A$$

De onde finalmente segue o resultado.

20.(Vardan Verdiyan e Daniel Campos Salas-"Simple trigonometric substitutions with broad results")Let a,b,c real numbers such that $a+b+c=\sqrt{abc}$.Prove that:

$$ab+bc+ac\geq 9(a+b+c)$$

Solução 1: Dividindo a desigualdade por $a+b+c=\sqrt{abc}$, a desigualdade é equivalente a:

$$\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ac}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\geq 9$$

Dividindo a condição por $\sqrt{abc}$, a condição é equivalente a:

$$\sqrt{\frac{a}{bc}}+\sqrt{\frac{b}{ac}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}=1$$

O que temos que provar agora é a seguinte implicação:

$$\sqrt{\frac{a}{bc}}+\sqrt{\frac{b}{ac}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}=1\Rightarrow\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ac}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\geq 9 \tag{78}$$

Sejam x,y e z números reais quaisquer, faça a substituição:

$$x=\sqrt[4]{\frac{bc}{a^3}},y=\sqrt[4]{\frac{ac}{b^3}},z=\sqrt[4]{\frac{ab}{c^3}}$$

Multiplicando as igualdades acima duas a duas, vem:

$$xy=\sqrt{\frac{c}{ab}},xz=\sqrt{\frac{b}{ac}},yz=\sqrt{\frac{a}{bc}}$$

Substituindo em (78), segue que:

$$xy+xz+yz=1\Rightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}\geq 9 \tag{79}$$

Fazendo $x=tan\frac{\alpha}{2},y=tan\frac{\beta}{2},z=tan\frac{\gamma}{2}$, alpha, beta e gamma são ângulos de um triângulo.De onde vemos que a desigualdade é equivalente a:

$$tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\beta}{2}+tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\gamma}{2}+tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2}=1\Rightarrow cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\beta}{2}+cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\gamma}{2}+cot\frac{\beta}{2}cot\frac{\gamma}{2}\geq 9 \tag{80}$$

Veja que o que temos que provar é que a desigualdade acima é uma desigualdade do triângulo, mas isso é possível ver, se alpha, beta e gamma são ângulos de um triângulo, pela desigualdade 3 vale que:

$$sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}\leq\frac{1}{8}$$

$$csc\frac{\alpha}{2}csc\frac{\beta}{2}csc\frac{\gamma}{2}\geq 8$$

Multiplicando ambos os lados por $sen\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=1$, teremos:

$$csc\frac{\alpha}{2}csc\frac{\beta}{2}csc\frac{\gamma}{2}sen\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \geq 8$$
$$csc\frac{\alpha}{2}csc\frac{\beta}{2}csc\frac{\gamma}{2}\left(sen\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}+cos\frac{\alpha+\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}\right) \geq 8$$
$$csc\frac{\alpha}{2}csc\frac{\beta}{2}csc\frac{\gamma}{2}\left(\left(sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}+cos\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}\right)cos\frac{\gamma}{2}+\left(cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}-sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}\right)sen\frac{\gamma}{2}\right) \geq 8$$
$$cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\beta}{2}+cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\gamma}{2}+cot\frac{\beta}{2}cot\frac{\gamma}{2} \geq 9$$

Solução 2: Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz ao lado esquerdo da desigualdade da relação (78) e pela igualdade da relação (78), segue o resultado diretamente.

21.(OBM)Se xy+xz+yz=1, prove que:

$$\frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}+\frac{2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2}+\frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}\leq\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}$$

Solução. Substituindo por tangentes de apha/2, beta/2 e gamma/2, note que alpha, beta e gamma serão ângulos de um triângulo.Teremos no lado esquerdo, pelas identidades 11 e 12 e no lado direito pela identidade 2, vê-se facilmente que a desigualdade é equivalente a:

$$sen\alpha cos\alpha+sen\beta cos\beta+sen\gamma cos\gamma\leq sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}+sen\frac{\beta}{2}cos\frac{\beta}{2}+sen\frac{\gamma}{2}cos\frac{\gamma}{2}$$

$$sen2\alpha+sen2\beta+sen2\gamma\leq sen\alpha+sen\beta+sen\gamma \tag{81}$$

Nos resta provar (81), é simples veja:

$cos(\alpha-\beta)\leq 1\Rightarrow 2sen(\alpha+\beta)cos(\alpha-\beta)\leq 2sen(\alpha+\beta)\Rightarrow 2sen(\alpha+\beta)cos(\alpha-\beta)\leq 2sen(\pi-(\alpha+\beta))\Rightarrow sen2\alpha+sen2\beta\leq 2sen(\alpha+\beta+\gamma-(\alpha+\beta))=2sen\gamma$

Fazendo o mesmo para os outros ângulos, teremos:

$$sen2\alpha+sen2\beta\leq 2sen\gamma \tag{82}$$

$$sen2\alpha+sen2\gamma\leq 2sen\beta \tag{83}$$

$$sen2\beta+sen2\gamma\leq 2sen\alpha \tag{84}$$

Somando (82), (83) e (84) segue o resultado[6].

[6]Em verdade a desigualdade de Jensen é uma "generalização" da definição de concavidade e convexidade, já que podemos perfeitamente definir concavidade ou convexidade em função da desigualdade elementar.É muito importante notar que o fato de uma função de n variáveis obedecer a um CASO PARTICULAR da desigualdade de Jensen, não implica que essa função seja côncava ou convexa, isso pode ser mera coincidência.Dizemos nesses casos que vale a ida mas não vale a volta, isto é, se uma função é convexa vale a desigualdade de Jensen, mas se vale um caso particular da desigualdade de Jensen nem sempre vale convexidade ou concavidade.Um exemplo disso é função cosx, cuja derivada segunda é -cosx, se tomarmos a,b,c ângulos de um triângulo é verdade que $cosa+cosb+cosc\leq\frac{3}{2}$, mas note que essa função não é côncava em todo intervalo $(0,\pi)$, apesar disso pode ser facilmente provado que essa desigualdade é verdadeira em todo intervalo $(0,\pi)$, note que esse é um caso particular da desigualdade de Jensen, isto é, o caso em que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{3}$.Por outro lado, se vale a desigualdade de Jensen em seu caso geral, então a função ou é côncava ou é convexa, pois a desigualdade de Jensen implica a definição de concavidade ou convexidade, já que se demonstra a desigualdade de Jensen, por indução, partindo da definição de concavidade ou convexidade, que é a própria desigualdade de Jensen em duas variáveis.

22.("103 Problems From the Training USA IMO Team"-Titu Andreescu)Let A,B,C be a triangle.Prove that :

$$tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2}+tan\frac{A}{2}tan\frac{C}{2}+tan\frac{B}{2}tan\frac{C}{2}=1$$

Solução 1: Já sabemos que se x, y e z são ângulos de um triângulo vale $cos\left(\frac{x+y}{2}\right)=sen\frac{z}{2}$(veja o motivo na página 16 desse pdf).Agora, observe que:

$sen\alpha+sen\beta+sen\gamma=(sen\alpha+sen\beta-sen\gamma)+(sen\alpha+sen\gamma-sen\beta)+(sen\beta+sen\gamma-sen\alpha)=$
$\left(2sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}+2sen\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right)+\left(2sen\frac{\gamma}{2}cos\frac{\gamma}{2}+2sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)+$
$\left(2sen\frac{\beta}{2}cos\frac{\beta}{2}+2sen\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right)=\left(2sen\frac{\alpha}{2}sen\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)+2sen\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)sen\frac{\alpha}{2}\right)+$
$\left(2sen\frac{\gamma}{2}sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+2sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)sen\frac{\gamma}{2}\right)+\left(2sen\frac{\beta}{2}sen\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)+2sen\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)sen\frac{\beta}{2}\right)=$
$2sen\frac{\alpha}{2}\left(sen\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)+sen\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\right)+2sen\frac{\gamma}{2}\left(sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)+$
$2sen\frac{\beta}{2}\left(sen\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)+sen\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)\right)=4sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}+4sen\frac{\gamma}{2}sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}+$
$4sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}cos\frac{\alpha}{2}$

Usando que $sen\alpha+sen\beta+sen\gamma=4cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$, concluímos a igualdade:

$$cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}=sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}+sen\frac{\gamma}{2}sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}+sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}cos\frac{\alpha}{2} \quad (85)$$

Dividindo a equação (85) por $cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$ segue o resultado.

Solução 2: Observe a expressão $tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2} + tan\frac{A}{2}tan\frac{C}{2} + tan\frac{B}{2}tan\frac{C}{2}$,pela substituição (26) e (27) segue o resultado diretamente.

Solução 3: Veja página 21.

23.(Cálculo-Geraldo Ávila) Encontre uma expressão fechada para a soma:

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$

Solução: Pela relação 10, teremos: $tan(\arctan\omega + \arctan\phi) = \dfrac{\omega+\phi}{1-\omega\phi} \Rightarrow$ $\arctan(tan(\arctan\omega + \arctan\phi)) = \arctan\omega + \arctan\phi = \arctan\left(\dfrac{\omega+\phi}{1-\omega\phi}\right)$

De onde conluímos:

$$\arctan\omega + \arctan\phi = \arctan\left(\frac{\omega+\phi}{1-\omega\phi}\right)$$

Substituindo $\omega = \dfrac{k}{k+1}$ e $\phi = -\dfrac{k-1}{k}$ na igualdade acima, teremos:

$$\arctan\frac{k}{k+1} - \arctan\frac{k-1}{k} = \arctan\frac{\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}}{1 + \frac{k}{k+1}\frac{k-1}{k}} = \arctan\frac{1}{2k^2}$$

Conluindo assim que vale:

$$\arctan\frac{k}{k+1} - \arctan\frac{k-1}{k} = \arctan\frac{1}{2k^2}$$

Aplicando somatório variando em k dos dois lados acima, chega-se a:

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \arctan\frac{n}{n+1}$$

24.(Cálculo-Stewart) Os polinômios de Chebychev T_n são definidos por $T_n = cos(n \arccos x), \forall n \in \mathbb{N}$, mostre que para n maior ou igual a 1

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Solução: Usando a relação (5), e pela definição do polinômio de Chebychev:

$T_{n+1}(x) = cos((n+1) \arccos x) = cos((n \arccos x + \arccos x) = cos(n \arccos x)cos(\arccos x) - sen(n \arccos x)sen(\arccos x) = xcos(n \arccos x) - sen(n \arccos x)sen(\arccos x) \Rightarrow$
$cos((n+1) \arccos x) = xcos(n \arccos x) - sen(n \arccos x)sen(\arccos x)$
De onde concluímos:

$cos((n+1) \arccos x) = xcos(n \arccos x) - sen(n \arccos x)sen(\arccos x) \quad Igualdade\ A$
Agora veja que

$\dfrac{cos(a+b) - cos(a-b)}{2} = -senasenb \Rightarrow -sen(n \arccos x)sen(\arccos x) = \dfrac{cos((n+1) \arccos x) - cos((n-1) \arccos x)}{2}$

De onde concluímos a Igualdade:

$$-sen(n \arccos x)sen(\arccos x) = \frac{cos((n+1) \arccos x) - cos((n-1) \arccos x)}{2} \quad Igualdade\ B$$

Substituindo Igualdade B na Igualdade A, teremos:

$cos((n+1) \arccos x) = xcos(n \arccos x) + \dfrac{cos((n+1) \arccos x) - cos((n-1) \arccos x)}{2} = \dfrac{2xcos(n \arccos x) + cos((n+1) \arccos x) - cos((n-1) \arccos x)}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow cos((n+1) \arccos x) = 2xcos(n \arccos x) - cos((n-1) \arccos x)$

Que pela definição segue diretamente.

5 Um pouco além da trigonometria: Indução, Redução ao absurdo ou Contraposição, Sentenças Condicionais, Normalização de desigualdades Homogêneas, Cálculo

25.(Problema sugerido por Israel Meireles Chrisostomo) Dados dois números quaisquer, prove que sempre existe entre estes dois números uma sequência infinitamente decrescente e outra infinitamente crescente, ambas formadas por estes dois números, em outras palavras, prove que qualquer intervalo aberto de $\mathbb{R}$ pode conter uma sequência infinitamente crescente e infinitamente decrescente composta pelos extremos desse intervalo.

Solução :

Seja um intervalo aberto (a_1, b_1), então, podemos supor sem perda de generalidade que $b_1 > a_1$, veja o que podemos fazer com isso:

$b_1 > a_1 \Rightarrow 2b_1 > b_1 + a_1 \rightarrow b_1 > \dfrac{b_1 + a_1}{2}$

De onde concluímos que vale:

$$b_1 > \frac{b_1 + a_1}{2} \tag{86}$$

Por outro lado $b_1 > a_1 \Rightarrow b_1 + a_1 > 2a_1 \Rightarrow a_1 < \dfrac{b_1 + a_1}{2}$

De onde concluímos que vale:

$$a_1 < \frac{b_1 + a_1}{2} \tag{87}$$

De (86) e (87), chega-se a:

$$b_1 > \frac{b_1 + a_1}{2} > a_1 \tag{88}$$

Concluímos de (88) que há pelo menos um elemento entre a_1 e b_1.Vamos provar por indução que sempre podemos encontrar um número maior entre a_1 e b_1 .

Defina:

$$a_{n+1} = \frac{b_1(2^n - 1) + a_1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \tag{89}$$

Por hipótese de indução, considere:

$$b_1 > \frac{b_1(2^{n+1} - 1) + a_1}{2^{n+1}} > a_{n+1} \tag{90}$$

O lado esquerdo da desigualdade acima não há necessidade de indução, basta observar que isto segue diretamente do fato de que $b_1 > a_1$.Veja:

$b_1 > a_1 \Rightarrow 0 > -b_1 + a_1 \Rightarrow 2^{n+1}b_1 > 2^{n+1}b_1 - b_1 + a_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{n+1}b_1 > b_1(2^{n+1} - 1) + a_1 \Rightarrow b_1 > \dfrac{b_1(2^{n+1} - 1) + a_1}{2^{n+1}}$

Nos resta provar o lado direito, como base de indução, considere para o caso $n = 0$ já está provado, pois nada mais é do que a desigualdade (88).Observe que o que temos que provar por indução, é que a sequência a_{n+1} é crescente, entretanto não ultrapassa o termo b_1(como já provamos), e como o primeiro termo é a_1, isto é, o próprio extremo do intervalo, o resultado segue diretamente. Vamos desenvolver (90) apropriadamente, vamos substituir(89) em (90) e depois somar b_1 nos dois lados de (90), veja:

$\dfrac{b_1(2^{n+1}-1)+a_1}{2^{n+1}} > \dfrac{b_1(2^n-1)+a_1}{2^n} \Rightarrow \dfrac{b_1(2^{n+1}-1)+a_1}{2^{n+1}}+b_1 > \dfrac{b_1(2^n-1)+a_1}{2^n}+$
$b_1 \Rightarrow \dfrac{b_1(2^{n+2}-1)+a_1}{2^{n+1}} > \dfrac{b_1(2^{n+1}-1)+a_1}{2^n} \Rightarrow \dfrac{b_1(2^{n+2}-1)+a_1}{2^{n+2}} > \dfrac{b_1(2^{n+1}-1)+a_1}{2^{n+1}} \Rightarrow$
$\dfrac{b_1(2^{n+2}-1)+a_1}{2^{n+2}} > a_{n+2}$

De onde segue o resultado por indução.A prova para a sequência decrescente é análoga. Defina:

$$b_{n+1} = \frac{a_1(2^n-1)+b_1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \tag{91}$$

Como hipótese de indução considere:

$$b_{n+1} > \frac{a_1(2^{n+1}-1)+b_1}{2^{n+1}} > a_1 \tag{92}$$

O lado direito da desigualdade acima não há necessidade de indução, basta observar que isto segue diretamente do fato de que $b_1 > a_1$.Veja:

$a_1 < b_1 \Rightarrow 0 < -a_1 + b_1 \Rightarrow 2^{n+1}a_1 < 2^{n+1}a_1 - a_1 + b_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{n+1}a_1 < a_1(2^{n+1}-1)+b_1 \Rightarrow a_1 < \dfrac{a_1(2^{n+1}-1)+b_1}{2^{n+1}} \Rightarrow \dfrac{a_1(2^{n+1}-1)+b_1}{2^{n+1}} >$
a_1

Nos resta provar o lado esquerdo, como base de indução, considere, para o caso $n = 0$, que já está provado, pois nada mais é do que a desigualdade (88). Observe que o que temos que provar por indução, é que a sequência b_{n+1} é decrescente, entretanto seus termos nunca são menores que o termo a_1(acabamos de provar isto), e como o primeiro termo dessa sequência é b_1, isto é, o próprio extremo do intervalo, o resultado segue diretamente.Substituindo (91) no lado esquerdo de (92) e depois somando a_1 nos dois lados da desigualdade resultante teremos:

$\dfrac{a_1(2^n-1)+b_1}{2^n} > \dfrac{a_1(2^{n+1}-1)+b_1}{2^{n+1}} \Rightarrow \dfrac{a_1(2^n-1)+b_1}{2^n}+a_1 > \dfrac{a_1(2^{n+1}-1)+b_1}{2^{n+1}}+$
$a_1 \Rightarrow \dfrac{a_1(2^{n+1}-1)+b_1}{2^n} > \dfrac{a_1(2^{n+2}-1)+b_1}{2^{n+1}} \Rightarrow \dfrac{a_1(2^{n+1}-1)+b_1}{2^{n+1}} > \dfrac{a_1(2^{n+2}-1)+b_1}{2^{n+2}} \Rightarrow$
$b_{n+2} > \dfrac{a_1(2^{n+2}-1)+b_1}{2^{n+2}}$
De onde segue o resultado por indução[7].

[7]Observe que a desigualdade não é simétrica e por isso $b_1 > a_1$ determina sua direção.

26. (Teoria dos números:um passeio com primos e números familiares pelo mundo inteiro-Eduardo Tengan,Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Nicolau Corção Saldanha)Demonstre a fórmula do binômio de Newton para n natural.

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + ... + \binom{n}{0}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Solução: Como base de indução, considere o caso em que n=1, n=2 ou n=3. Como hipótese de indução, suponha válido para um n que:
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$
Dividindo ambos os lados da igualdade por a^n, nossa hipótese de indução é equivalente a:
$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k$
Vamos usar de início nossa hipótese de indução.Fazendo $x = \frac{b}{a}$, vem:
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$
Integrando ambos os lados em relação a x no intervalo $\left(0, \frac{b}{a}\right)$, obtemos:
$\int_0^{\frac{b}{a}} (1+x)^n\, dx = \int_0^{\frac{b}{a}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k dx \Rightarrow \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}\frac{b^{k+1}}{a^{k+1}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{n+1}(a+b)^{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = a^{n+1}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}\frac{b^{k+1}}{a^{k+1}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{n+1}(a+b)^{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} a^{n+1-(k+1)}b^{k+1}$
De onde concluímos que vale a igualdade:

$$\frac{1}{n+1}(a+b)^{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} a^{n+1-(k+1)}b^{k+1} \tag{93}$$

Agora, observe que:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n+1-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n+1-(k+1))!} = \frac{n!}{k!(n+1-(k+1))!}\frac{k+1}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}(k+1)\frac{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}\frac{k+1}{n+1} = \binom{n+1}{k+1}\frac{k+1}{n+1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}\frac{k+1}{n+1}$
Usando a igualdade acima em (93), concluímos:
$\frac{1}{n+1}(a+b)^{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \frac{1}{n+1} a^{n+1-(k+1)}b^{k+1}$

Multiplicando os dois lados por n+1, e somando a^{n+1} nos dois lados da igualdade, teremos:

$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} a^{n+1-(k+1)} b^{k+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} a^{n+1-(k+1)} b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k}$

De onde, finalmente, segue o resultado por indução.

27. (Mathematics Stack Exchange Question)But I also know that pi is not algebraic, so I'm not sure if I should be looking for an algebraic expression the limit of which w.r.t. a variable approaches a transcendental number.[8]

Solução 2:O que essa pessoa tem dúvida é se há uma expressão algébrica(querendo dizer, na verdade, sequência de números algébricos) cujo limite é um número transcendente, em outras palavras poderíamos construir uma sequência de algébricos cujo limite é transcendental?

Considere $\frac{1}{4}cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ que é claramente raiz de qualquer polinômio na forma $P(x) = x^n - \frac{1}{4^n}$,considere que

$$\frac{1}{2^n}cot\left(\frac{\pi}{2^n}\right), n \geq 2 \tag{94}$$

Como hipótese de indução, considere que (94) é algébrico.Agora note que:

$$\frac{1}{2^n}cot\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}\frac{cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}} - sen^2\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2sen\frac{\pi}{2^{n+1}}cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2^{n+1}}cot\frac{\pi}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

De onde concluímos que vale:

$$\frac{1}{2^n}cot\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}cot\frac{\pi}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}tan\frac{\pi}{2^{n+1}} \tag{95}$$

Como por hipótese, o lado esquerdo (95) é algébrico o lado direito também deve ser, suponha que a tangente seja transcendente, como o inverso de um número transcendente também é transcendente, a cotangente também deve ser transcendente, mas a soma de um transcendente com seu inverso também é claramente transcendente, logo concluiríamos que a soma é transcendente e portanto o lado esquerdo é transcendente, o que é absurdo, provando assim por indução que essa sequência é algébrica[9].Por outro lado seu limite tende a $\frac{1}{\pi}$.

[8]Este problema foi colocado apenas a título de curiosidade.

[9]Aqui vamos usar indução, mas note que, na indução devemos provar que $P(n) \rightarrow P(n+1)$, mas lembre-se que em lógica as proposições $P(n) \rightarrow P(n+1)$ e $\neg P(n+1) \rightarrow \neg P(n)$ são equivalentes, em outras palavras, provar que A implica B é o mesmo que provar que a negação de B implica a negação de A, dizemos nesses casos que estamos provando a contra positiva.As vezes provar a contra positiva está mais ao alcance de nossas mãos do que uma prova direta, principalmente quando se trata de irracionalidade e transcendência, isto pode ser explicado pelo fato de definirmos a irracionalidade e transcendência por exclusão:irracionais são aqueles números que não são racionais, transcendentes são aqueles números que não são algébricos

28.(Advanced Calculus-Lynn H. Loomis and Shlomo Stenrberg-Department of Mathematics)For x in $\mathbb{R}^n$ let $|x|$ be the Euclidean Length

$$|x| = \left[\sum_1^n x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

and let (x, y) be a scalar product

$$(x, y) = \sum_1^n x_i y_i$$

The Schwarz inequality says that

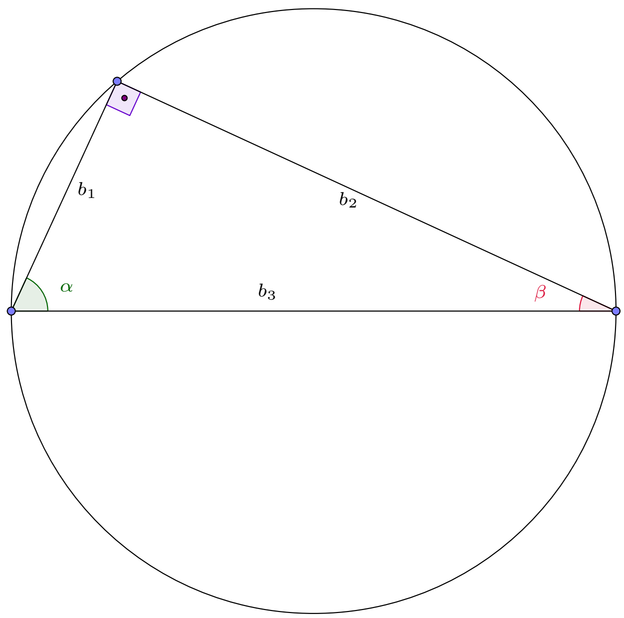
$$|(x, y)| \leq |x||y|$$

and that the inequality is strict if x and y are independent.
a)Prove the Schwarz inequality for the case n = 2 by squaring and canceling.
b) Now prove it for the general n in the same way.

Solução: De fato este é um problema que pode envolver um pouco de trigonometria.Nós vamos fazer a prova por indução.Como base de indução considere n=2.Isto é, o que temos que provar é a seguinte desigualdade:

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \tag{96}$$

Vamos construir um triângulo retângulo de catetos b_1, b_2, veja:

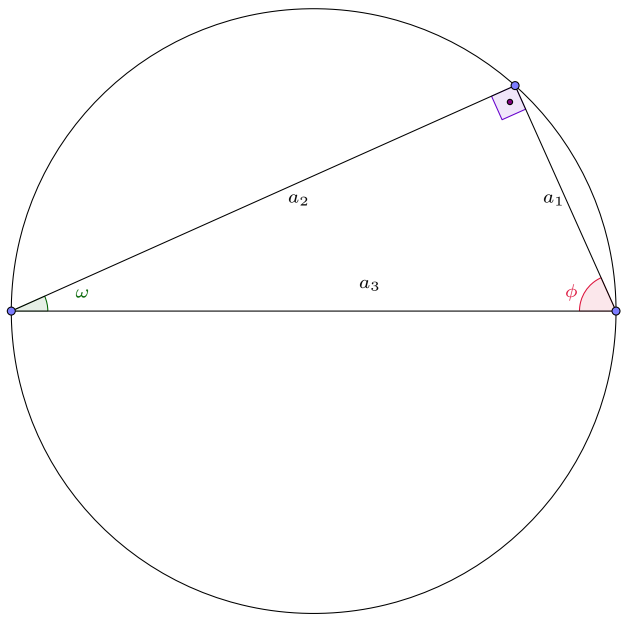


Da figura, observe que:

$$sen(\beta) = \frac{b_1}{b_3} = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \tag{97}$$

$$cos(\beta) = \frac{b_2}{b_3} = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \tag{98}$$

Vamos construir um triângulo retângulo de catetos a_1, a_2, veja:



Da figura, observe que:

$$sen(\phi) = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \tag{99}$$

$$cos(\phi) = \frac{a_1}{a_3} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \tag{100}$$

De (97),(98),(99) e (100) segue que:

$$\frac{a_1 b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} + \frac{a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = cos\phi sen\beta + sen\phi cos\beta =$$

$$= sen(\beta + \phi) \leq 1 \Rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Que ao se elevar ao quadrado é o resultado desejado.Como hipótese de indução, considere:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \tag{101}$$

Observe, pela desigualdade das médias em duas variáveis, as n desigualdades que se seguem:

$$a_1^2b_{n+1}^2 + b_1^2a_{n+1}^2 \geq 2a_1b_1a_{n+1}b_{n+1}$$
$$a_2^2b_{n+1}^2 + b_2^2a_{n+1}^2 \geq 2a_2b_2a_{n+1}b_{n+1}$$
$$a_3^2b_{n+1}^2 + b_3^2a_{n+1}^2 \geq 2a_3b_3a_{n+1}b_{n+1}$$
$$...$$
$$...$$
$$...$$
$$a_n^2b_{n+1}^2 + b_n^2a_{n+1}^2 \geq 2a_nb_na_{n+1}b_{n+1}$$

Somando essas n desigualdades, segue:

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)b_{n+1}^2+(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)a_{n+1}^2 \geq 2a_{n+1}b_{n+1}(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+...+a_nb_n) \tag{102}$$

Somando (101) com (102), segue que:

$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)b_{n+1}^2+(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)a_{n+1}^2+(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \geq 2a_{n+1}b_{n+1}(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n) + (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$

Somando $a_{n+1}^2b_{n+1}^2$ nos dois lados da desigualdade acima, vem:

$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)b_{n+1}^2+(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)a_{n+1}^2+(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)+ + a_{n+1}^2b_{n+1}^2 \geq a_{n+1}^2b_{n+1}^2 + 2a_{n+1}b_{n+1}(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n) + (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$

Observe que o lado direito é um produto notável[10], bem como rearranjando o lado esquerdo e fatorando teremos:

$[(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)b_{n+1}^2 + a_{n+1}^2b_{n+1}^2] + [(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)a_{n+1}^2 + (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)] \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1})^2$

$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1}^2)b_{n+1}^2 + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1}^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1})^2$

$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1}^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2 + b_{n+1}^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1})^2$

Provando assim por indução a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

[10]O quadrado da soma de dois termos, a saber $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

29.(Cálculo-Serge Lang)Se $a_1, ..., a_n$ são números maiores ou iguais a zero, mostre que[11]:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} a_n}$$

Solução 1: Como base de indução considere que todo quadrado de número real é positivo, sendo assim:

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

Suponha válido para um n que:

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 ... x_n} \tag{103}$$

Da desigualdade acima, teremos [12]:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... a_{n-4} + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} =$$
$$\underbrace{\underbrace{\frac{a_2 + ... + a_{n+1}}{n}}_{falta\ o\ termo\ a_1} + \underbrace{\frac{a_1 + a_3 + ... + a_{n+1}}{n}}_{falta\ o\ termo\ a_2} + ... + \underbrace{\frac{a_1 + ... + a_n}{n}}_{falta\ o\ termo\ a_{n+1}}}_{Aqui\ temos\ n+1\ parcelas\ somando,\ cada\ parcela\ com\ n\ termos} \geq$$
$$\sqrt[n]{a_2 ... a_{n+1}} + \sqrt[n]{a_1 a_3 ... a_{n+1}} + ... + \sqrt[n]{a_1 ... a_n} = \sqrt[n]{a_1 ... a_{n+1}} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{a_1}} + ... + \frac{1}{\sqrt[n]{a_{n+1}}} \right)$$

De onde concluímos a desigualdade:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... a_{n-4} + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} \geq \sqrt[n]{a_1 ... a_{n+1}} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{a_1}} + ... + \frac{1}{\sqrt[n]{a_{n+1}}} \right) \tag{104}$$

Aplicando a desigualdade de Jensen para a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$, que é convexa para x positivo, com $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ teremos:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1}} + ... + \frac{1}{\sqrt[n]{a_{n+1}}} \geq (n+1) \sqrt[n]{\frac{n+1}{a_1 + ... + a_{n+1}}}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $\sqrt[n]{a_1 ... a_{n+1}}$, chegamos a:

[11]Esta é a Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica, para provar a desigualdade entre a média geométrica e harmônica, basta fazer $a_k = \dfrac{1}{b_k}$.O autor do livro, sugere dois raciocínios em diferentes partes do texto para que o leitor prove a desigualdade das médias, aqui eu não segui nenhuma de suas sugestões, para mais informações veja seu livro Cálculo.

[12]Cada k-ésima parcela falta o termo a_k.

$$\sqrt[n]{a_1 ... a_{n+1}} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{a_1}} + ... + \frac{1}{\sqrt[n]{a_{n+1}}} \right) \geq (n+1) \sqrt[n]{\frac{(n+1) a_1 ... a_{n+1}}{a_1 + ... + a_{n+1}}} \tag{105}$$

Observe que o lado direito de (104) é o lado esquerdo de (105), assim por transitividade, teremos:

$$a_1 + ... + a_{n+1} \geq (n+1) \sqrt[n]{\frac{(n+1) a_1 ... a_{n+1}}{a_1 + ... + a_{n+1}}} \tag{106}$$

Elevando ambos os lados da desigualdade acima a n-ésima potência, chegamos a:

$$(a_1 + ... + a_{n+1})^n \geq (n+1)^{n+1} \frac{a_1 ... a_{n+1}}{a_1 + ... + a_{n+1}} \tag{107}$$

$$\frac{(a_1 + ... + a_{n+1})^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \geq a_1 ... a_{n+1} \tag{108}$$

$$\left(\frac{a_1 + ... + a_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} \geq a_1 ... a_{n+1} \tag{109}$$

Extraindo a raiz n+1-ésima, teremos:

$$\frac{a_1 + ... + a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 ... a_{n+1}} \tag{110}$$

30.(Questão postada em uma comunidade do Facebook)Resolva a equação:

$$1 + sen^3x + cos^3x = \frac{3}{2}sen(2x)$$

Solução:

Podemos ver diretamente duas soluções particulares $x = \frac{3\pi}{2}$ e $x = \pi$.Mas não sabemos se há outra solução, se não aquelas que são côngruas a estas soluções.Vamos provar que não existem outras soluções além das soluções côngruas.Para tanto, basta observar que $sen^2x = 1 - cos^2x$ e $cos^2x = 1 - sen^2x$, daí segue que:

$$1 + sen^3x + cos^3x = 1 + sen^2xsenx + cos^2xcosx = 1 + (1 - cos^2x)senx$$
$$+ (1 - sen^2x)cosx = 1 + senx + cosx - senxcos^2x - cosxsen^2x$$

De onde concluímos que nossa equação é equivalente a:

$$1 + senx + cosx - senxcos^2x - cosxsen^2x = \frac{3}{2}sen(2x)$$

Usando que $sen(2x) = 2senxcosx$, nossa equação é equivalente a:

$$1 + senx + cosx - senxcos^2x - cosxsen^2x = 3senxcosx \tag{111}$$

De (111), veja o que podemos fazer:

$$\begin{gathered}
1 + senx + cosx - senxcos^2x - cosxsen^2x = 3senxcosx \\
1 + senx + cosx - senxcosx(senx + cosx) = 3senxcosx \\
1 + (1 - senxcosx)(senx + cosx) = 3senxcosx \\
1 - senxcosx + (1 - senxcosx)(senx + cosx) = 2senxcosx \\
(1 - senxcosx)(1 + senx + cosx) = 2senxcosx
\end{gathered}$$

De onde concluímos que nossa equação é equivalente a:

$$(1 - senxcosx)(1 + senx + cosx) = 2senxcosx \tag{112}$$

Somando e subtraindo 1 no lado direito da igualdade acima, teremos:

$$(1 - senxcosx)(1 + senx + cosx) = 1 + 2senxcosx - 1 = sen^2x + cos^2x + 2senxcosx - 1 = (senx + cosx)^2 - 1 = (1 + senx + cosx)(-1 + senx + cosx)$$

De onde concluímos:

$$(1 - senxcosx)(1 + senx + cosx) = (1 + senx + cosx)(-1 + senx + cosx) \tag{113}$$

Supondo que haja soluções diferentes das triviais, devemos tomar $x \neq \frac{3\pi}{2}$ e $x \neq \pi$, daí podemos efetuar o cancelamento do termo $(1 + senx + cosx)$, sendo assim teremos:

$$1 - senxcosx = -1 + senx + cosx \tag{114}$$

De (114) segue que:

$1 - senxcosx = -1 + senx + cosx \Rightarrow 4 = 2senxcosx + 2(senx + cosx) \Rightarrow 5 = 1 + 2senxcosx + 2(senx + cosx) \Rightarrow 5 = sen^2x + cos^2x + 2senxcosx + 2(senx + cosx) \Rightarrow 5 = (senx + cosx)^2 + 2(senx + cosx)$

Fazendo $senx + cosx = y$, teremos a equação:

$$y^2 + 2y - 5 = 0 \tag{115}$$

Cujas soluções são $-1 - \sqrt{6}$ e $\sqrt{6} - 1$, valores estes que estão fora do intervalo que y pode assumir, já que $senx + cosx = \sqrt{2}sen\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, cujo máximo é $\sqrt{2}$ e cujo mínimo é $-\sqrt{2}$.

31.(IMO 1984-International Mathematical Olympiad[13]/Putnam and Beyond-Titu Andreescu)Let $a > 0, b > 0, c > 0, a + b + c = 1$.Prove that:

$$0 \leq ab + bc + ac - 2abc \leq \frac{7}{27}$$

Solução: O lado esquerdo é trivial.Por isso, vamos nos preocupar com o lado direito.O lado esquerdo basta observar que pela desigualdade das médias segue que $ab + bc + ac \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow ab + bc + ac - 2abc \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} - 2abc = \sqrt[3]{(abc)^2} + 2(\sqrt[3]{(abc)^2} - abc) = \sqrt[3]{(abc)^2} + 2\frac{(abc)^2 - (abc)^3}{\sqrt[3]{(abc)^4} + \sqrt[3]{(abc)^2}abc + (abc)^2} = \sqrt[3]{(abc)^2} + 2(abc)^2\frac{1 - abc}{\sqrt[3]{(abc)^4} + \sqrt[3]{(abc)^2}abc + (abc)^2} > 0$, a última desigualdade segue do fato de a,b,c serem menores do que 1 e maiores do que zero.Seja $P(x)$ um polinômio de raízes a, b, c, seja esse polinômio o que está abaixo:

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{116}$$

Pelas relações de Girard para um polinômio do terceiro grau, sabemos que vale:

Relações de Girard

$$a + b + c = -\frac{a_2}{a_3} \Rightarrow a_2 = -a_3(a + b + c) \quad Igualdade\ A$$
$$ab + bc + ac = \frac{a_1}{a_3} \Rightarrow a_1 = a_3(ab + bc + ac) \quad Igualdade\ B$$
$$abc = -\frac{a_0}{a_3} \Rightarrow a_0 = -a_3abc \quad Igualdade\ C$$

Substituindo as Igualdades A, B e C em (116), teremos:

$$P(x) = a_3x^3 - a_3(a + b + c)x^2 + a_3(ab + bc + ac)x - a_3abc \tag{117}$$

Seja σ_k uma soma de Newton do polinômio, então, sabemos que vale para um polinômio arbitrário $Q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$:

$$b_3\sigma_k + b_2\sigma_{k-1} + b_1\sigma_{k-2} + b_0\sigma_{k-3} = 0 \tag{118}$$

Aplicando o resultado (118) a (117), teremos:

$$a_3\sigma_k - a_3(a + b + c)\sigma_{k-1} + a_3(ab + bc + ac)\sigma_{k-2} - a_3abc\sigma_{k-3} = 0$$

Dividindo ambos os lados da igualdade acima por a_3, teremos:

$$\sigma_k - (a + b + c)\sigma_{k-1} + (ab + bc + ac)\sigma_{k-2} - abc\sigma_{k-3} = 0 \tag{119}$$

Fazendo $k = 3$ em (119) e usando que $a + b + c = 1$, teremos:

[13] Veja uma solução diferente da que eu apresentei neste pdf no site da Universidade de Cornell: Cornnell University.

$\sigma_3 - (a+b+c)\sigma_2 + (ab+bc+ac)\sigma_1 - abc\sigma_0 = 0$

$(a^3+b^3+c^3) - (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) + (ab+bc+ac)(a+b+c) - 3abc = 0$

$(a^2+b^2+c^2) = (a^3+b^3+c^3) + (ab+bc+ac) - 3abc$

$(a^2+b^2+c^2) = (a^3+b^3+c^3) + \dfrac{2(ab+bc+ac)}{2} - 3abc$

$(a^2+b^2+c^2) = (a^3+b^3+c^3) + \dfrac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} - 3abc$

$(a^2+b^2+c^2) = (a^3+b^3+c^3) + \dfrac{1 - (a^2+b^2+c^2)}{2} - 3abc$

$\dfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{2} = (a^3+b^3+c^3) + \dfrac{1}{2} - 3abc$

$a^2+b^2+c^2 = \dfrac{2(a^3+b^3+c^3)}{3} + \dfrac{1}{3} - 2abc$

De onde concluímos a igualdade abaixo:

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{3} + \frac{1}{3} - 2abc \tag{120}$$

Vamos usar novamente a identidade que acabamos de provar, a saber:

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac))$$

Veja como podemos desenvolver essa identidade(lembre-se, estamos usando que $a+b+c=1$):

$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)) =$
$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac) \Rightarrow ab+bc+ac-3abc = a^2+b^2+c^2-(a^3+b^3+c^3) \Rightarrow$
$ab+bc+ac-abc = a^2+b^2+c^2-(a^3+b^3+c^3)+2abc$

De onde concluímos a igualdade abaixo:

$$ab+bc+ac-abc = a^2+b^2+c^2-(a^3+b^3+c^3)+2abc \tag{121}$$

Substituindo (120) em (121), teremos:

$ab+bc+ac-abc = \dfrac{2(a^3+b^3+c^3)}{3} + \dfrac{1}{3} - 2abc - (a^3+b^3+c^3) + 2abc =$
$-\dfrac{(a^3+b^3+c^3)}{3} + \dfrac{1}{3}$

De onde concluímos a igualdade abaixo:

$$ab+bc+ac-abc = -\frac{(a^3+b^3+c^3)}{3} + \frac{1}{3} \tag{122}$$

Considere agora que a função $f(x) = x^3$ é convexa, pois sua derivada segunda é positiva para x positivo, sendo assim, aplicando a desigualdade de Jensen a esta função em três variáveis, e usando que $a + b + c = 1$, teremos:

$$\frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

Multiplicando por -1, teremos a desigualdade:

$$-\frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{3} \leq -\frac{1}{27}$$

Somando $1/3$ na desigualdade acima, teremos:

$$-\frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{3} + \frac{1}{3} \leq \frac{8}{27} \tag{123}$$

De (123) e (122) concluímos a desigualdade:

$$ab + bc + ac - abc \leq \frac{8}{27} \tag{124}$$

Faça a substituição:

$$x = \sqrt{\frac{bc}{a}}; y = \sqrt{\frac{ac}{b}}; z = \sqrt{\frac{ab}{c}};$$

Observe que essa substituição nos leva a $yz = a, xz = b, xy = c$, concluindo assim que:

$$a + b + c = 1 \Rightarrow xy + xz + yz = 1$$

Note que por essa substituição x, y e z são tangentes com argumentos que valem metade dos ângulos de um triângulo, portanto, fazendo $x = tan\frac{\alpha}{2}, y = tan\frac{\beta}{2}, z = tan\frac{\gamma}{2}$, alpha, beta e gamma são ângulos de um triângulo.Sendo assim, a desigualdade (124) fica reescrita como:

$$xyz(x + y + z) - x^2y^2z^2 \leq \frac{8}{27} \tag{125}$$

Observe ainda que, como a cotangente é convexa no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e como alpha, beta e gamma são ângulos de um triângulo, segue, pela desigualdade de Jensen a desigualdade abaixo:

$$cot\frac{\alpha}{2} + cot\frac{\beta}{2} + cot\frac{\gamma}{2} \geq 3\sqrt{3} \tag{126}$$

Pela identidade 6 do início desse artigo sabemos que vale $tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\beta}{2} + tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\gamma}{2} + tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2} = 1$ multiplicando os dois lados dessa igualdade por $cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\beta}{2}cot\frac{\gamma}{2}$, teremos $cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2}+cot\frac{\gamma}{2}=cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\beta}{2}cot\frac{\gamma}{2}$, substituindo esse resultado em (126), teremos:

$$cot\frac{\alpha}{2}cot\frac{\beta}{2}cot\frac{\gamma}{2}\geq 3\sqrt{3}\Rightarrow tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{9}\Rightarrow xyz\leq\frac{\sqrt{3}}{9}$$

De onde concluímos que vale:

$$xyz\leq\frac{\sqrt{3}}{9} \tag{127}$$

Além disso considere, pela desigualdade de Jensen que a tangente também é convexa no intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ e como alpha, beta e gamma são ângulos de um triângulo, concluímos a desigualdade:

$$tan\frac{\alpha}{2}+tan\frac{\beta}{2}+tan\frac{\gamma}{2}\geq\sqrt{3} \tag{128}$$

Que nada mais é do que a desigualdade 7 do início desse artigo. Substituindo por x,y e z, teremos:

$$x+y+z\geq\sqrt{3} \tag{129}$$

Ou melhor ainda:

$$-(x+y+z)\leq-\sqrt{3} \tag{130}$$

Vamos memorizar a desigualdade acima, e voltar nossa atenção para a desigualdade (125), multiplicando (125) por 3 e somando $-2(x+y+z)xyz+x^2y^2z^2$ nos dois lados de (125), teremos:

$$xyz(x+y+z)-2x^2y^2z^2\leq\frac{8}{9}-2(x+y+z)xyz+x^2y^2z^2 \tag{131}$$

Multiplicando (130) por $2xyz$ e somando $\frac{8}{9}+x^2y^2z^2$ nos dois lados da desigualdade resultante teremos:

$$-2xyz(x+y+z)+\frac{8}{9}+x^2y^2z^2\leq-2\sqrt{3}xyz+\frac{8}{9}+x^2y^2z^2 \tag{132}$$

Observe que o lado esquerdo de (132) é o lado direito de (131), sendo assim, por transitividade, teremos:

$$xyz(x+y+z)-2x^2y^2z^2\leq-2\sqrt{3}xyz+\frac{8}{9}+x^2y^2z^2 \tag{133}$$

Agora, observe que fazendo $xyz=m$ teremos uma função do segundo grau do lado direito, a saber $-2\sqrt{3}m+\frac{8}{9}+m^2$ note que como o termo de maior grau é positivo essa função é crescente no intervalo em que nossa desigualdade está definida[14]e como sabemos pela desigualdade (127) que $m = xyz \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$ em outras palavras $m \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$, juntando isto ao fato da função ser crescente no intervalo em que nossa desigualdade está definida, todos os outros valores que nossa função do segundo grau assume serão menores do que o valor assumido quando $m = \frac{\sqrt{3}}{9}$ (pois a função é crescente e m é menor ou igual a esse valor), e como para $m = \frac{\sqrt{3}}{9}$ temos que $-2\sqrt{3}m + \frac{8}{9} + m^2 = \frac{7}{27}$, concluímos por esse raciocínio, que vale a desigualdade:

$$-2\sqrt{3}xyz + \frac{8}{9} + x^2y^2z^2 \leq \frac{7}{27} \tag{134}$$

Observe que o lado direito de (133) é o lado esquerdo de (134), sendo assim, por transitividade, teremos:

$$xyz(x+y+z) - 2x^2y^2z^2 \leq \frac{7}{27} \tag{135}$$

Desfazendo a substituição feita no início, finalmente teremos:

$$ab + bc + ac - 2abc \leq \frac{7}{27}$$

[14]Para provar que a função é crescente no intervalo em que a desigualdade do problema está definida, basta acharmos o y do vértice, veja que $y_v = \frac{-19}{9}$, isto significa que o mínimo global dessa função é igual a $\frac{-19}{9}$, logo como a função tem a concavidade voltada para cima, a função é crescente para valores de y maiores que $\frac{-19}{9}$, e portanto é crescente também para valores da função maiores do que zero, e devemos observar que $-2\sqrt{3}m + \frac{8}{9} + m^2$ é sempre estritamente maior do que zero, para isto basta notar que $0 < xyz(x+y+z) - 2x^2y^2z^2 \leq -2\sqrt{3}xyz + \frac{8}{9} + x^2y^2z^2$, e para provar que $0 < xyz(x+y+z) - 2x^2y^2z^2$ é fácil, basta ver que como $xy + xz + yz = 1$ e x,y,z são positivos teremos $xy < 1 \Rightarrow x^2y^2z^2 < xyz^2 \Rightarrow -xyz^2 < -x^2y^2z^2 ... Desiualdade\ A$ da mesma forma que $xz < 1 \Rightarrow x^2y^2z^2 < xy^2z \Rightarrow -xy^2z < -x^2y^2z^2 ... Desigualdade\ B$, somando as Desigualdades A e B teremos $-xyz^2 - xy^2z < -2x^2y^2z^2 \Rightarrow (x+y+z)xyz - xyz^2 - xy^2z < (x+y+z)xyz - 2x^2y^2z^2 \Rightarrow x^2yz < (x+y+z)xyz - 2x^2y^2z^2 \Rightarrow 0 < x^2yz < (x+y+z)xyz - 2x^2y^2z^2 \Rightarrow 0 < (x+y+z)xyz - 2x^2y^2z^2$ esta última desigualdade segue do fato de x,y e z serem maiores do que zero.

32. (Página Sciences Mathématiques/"Curso de Análise"-Elon Lages Lima, página 125, capítulo 4, exercício 33)Calculate:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$$

Solução: Vamos usar uma desigualdade importante.Seja f uma função contínua crescente, definida para todo $x \geq 1$, tal que $f(x) \geq 0$, Então, vale a desigualdade abaixo:

$$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n-1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(2)+f(3)+f(4)+...+f(n)$$

Fazendo $f(x) = lnx$, é possível ver que:

$$ln(1)+ln(2)+ln(3)+...+ln(n-1) \leq \int_1^n ln(x)dx \leq ln(2)+ln(3)+ln(4)+...+ln(n)$$

$$ln(2.3.4.5.6.7.8...(n-1)) \leq (x(ln(x)-1))|_1^n \leq ln(2.3.4.5.6.7.8...(n-1)n)$$

$$ln((n-1)!) \leq (n(ln(n)-1))+1 \leq ln(n!)$$

Tomando a exponencial em todas as partes da desigualdade, teremos:

$$e^{ln((n-1)!)} \leq e^{(n(ln(n)-1))+1} \leq e^{ln(n!)}$$

$$(n-1)! \leq e^{nln(n)-n+1} \leq n!$$

$$(n-1)! \leq e^{ln(n^n)-n+1} \leq n!$$

$$(n-1)! \leq e^{ln(n^n)}e^{-n}e \leq n!$$

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n} e \leq n!$$

Vamos chamar a desigualdade acima de (136), sendo assim teremos:

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n} e \leq n! \tag{136}$$

Vamos pegar o lado direito da desigualdade (136), veja:

$$n^n e^{-n} e \leq n! \Rightarrow n^n e^{-n} e(2n)! \leq (2n)!n! \Rightarrow \frac{n^n e^{-n} e(2n)!}{n!} \leq (2n)! \Rightarrow \frac{n^n e^{-n} e(2n)!}{n!n!} \leq \frac{(2n)!}{n!} \Rightarrow \frac{e^{-n} e(2n)!}{n!n!} \leq \frac{(2n)!}{n!n^n} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{e^{-n} e(2n)!}{n!n!}} \leq \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$$

De onde concluímos que vale a desigualdade:

$$\sqrt[n]{\frac{e^{-n} e(2n)!}{n!n!}} \leq \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}} \tag{137}$$

Agora tome o lado esquerdo da desigualdade (136):

$$(n-1)! \le n^n e^{-n} e \Rightarrow \frac{(n-1)!}{n^n} \le e^{-n} e \Rightarrow \frac{(2n)!}{n^n} \le \frac{(2n)! e^{-n} e}{(n-1)!} \Rightarrow \frac{(2n)!}{n^n n!} \le \frac{(2n)! e^{-n} e}{(n-1)! n!} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n n!}} \le \sqrt[n]{\frac{(2n)! e^{-n} e}{(n-1)! n!}} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n n!}} \le \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)! e^{-n} e}{n! n!}}$$

De onde concluímos que vale a desigualdade:

$$\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n n!}} \le \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)! e^{-n} e}{n! n!}} \tag{138}$$

Das desigualdades (137) e (138) e tomando o limite de n tendendo ao infinito, concluímos que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{-n} e (2n)!}{n! n!}} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n n!}} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)! e^{-n} e}{n! n!}} \tag{139}$$

Vamos calcular o limite dos extremos, substituindo n por 2n na desigualdade (136), teremos:

$$(2n-1)! \le (2n)^{2n} e^{-2n} e \le (2n)! \tag{140}$$

Tomando o lado direito de (140), teremos:

$$(2n)^{2n} e^{-2n} e \le (2n)! \Rightarrow (2n)^{2n} (2n)! e^{-2n} e \le ((2n)!)^2 \Rightarrow \frac{(2n)^{2n} (2n)! e^{-2n} e}{(n!)^2} \le \frac{((2n)!)^2}{(n!)^2} \Rightarrow \frac{(2n)! e^{-2n} e}{(n!)^2} \le \frac{((2n)!)^2}{(2n)^{2n} (n!)^2} \Rightarrow \frac{(2n)! e^{-2n} e}{(n!)^2} \le \frac{((2n)!)}{(2n)^{2n}} \frac{2n!}{n!^2} \Rightarrow \frac{(2n)! e^{-n} e}{(n!)^2} \le e^n \frac{((2n)!)}{(2n)^{2n}} \frac{2n!}{n!^2} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{(2n)! e^{-n} e}{(n!)^2}} \le e \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$$

De onde concluímos que:

$$\sqrt[n]{\frac{(2n)! e^{-n} e}{(n!)^2}} \le e \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \tag{141}$$

Tomando o lado esquerdo de (140), teremos:

$$(2n-1)! \le (2n)^{2n} e^{-2n} e \Rightarrow \frac{(2n-1)!(2n!)}{(n!)^2} \le \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} e (2n!)}{(n!)^2} \Rightarrow e^n \frac{(2n-1)!(2n!)}{(2n)^{2n} (n!)^2} \le \frac{e^{-n} e (2n!)}{(n!)^2} \Rightarrow e \sqrt[n]{\frac{(2n-1)!}{(2n)^{2n}}} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \le \sqrt[n]{\frac{e^{-n} e (2n!)}{(n!)^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{e}{\sqrt[n]{2n}}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{e^{-n}e(2n!)}{(n!)^2}}$$

De onde concluímos que:

$$\frac{e}{\sqrt[n]{2n}}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{e^{-n}e(2n!)}{(n!)^2}} \tag{142}$$

Juntando (141) e (142) e tomando o limite n tendendo ao infinito, teremos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e}{\sqrt[n]{2n}}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!e^{-n}e}{n!n!}} \leq \lim_{n\to\infty} e\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \tag{143}$$

Agora vamos aplicar novamente a desigualdade (136), pegando o lado direito, é possível ver que:

$$n^n e^{-n} e \leq n! \Rightarrow \frac{1}{e}e^{\frac{1}{n}} \leq \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

De onde concluímos que:

$$\frac{1}{e}e^{\frac{1}{n}} \leq \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \tag{144}$$

Pegando o lado esquerdo da desigualdade (136), é possível ver que:

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n} e \Rightarrow \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \leq \frac{e^{\frac{1}{n}}n^{\frac{1}{n}}}{e}$$

De onde concluímos que:

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \leq \frac{e^{\frac{1}{n}}n^{\frac{1}{n}}}{e} \tag{145}$$

Tomando o limite de n tendendo ao infinito em (144) e (145), chega-se facilmente a:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e} \tag{146}$$

Substituindo n por 2n e depois de aplicar propriedades do produto de limites em (146) é possível ver que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}} = \frac{1}{e^2} \tag{147}$$

Considere novamente a desigualdade (140), vamos pegar o lado direito, veja: $e^{-2n}e(2n)^{2n} \leq (2n)! \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{e^{-2n}e(2n)^{2n}}{(n!)^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \Rightarrow e^{-2}e^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{\frac{(2n)^{2n}}{(n!)^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \Rightarrow 4e^{-2}e^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(n!)^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

De onde concluímos que sempre vale:

$$4e^{-2}e^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(n!)^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \tag{148}$$

Considere novamente a desigualdade (140), vamos pegar o lado esquerdo, veja:

$(2n-1)! \leq e^{-2n}e(2n)^{2n} \Rightarrow 2n! \leq 2ne^{-2n}e(2n)^{2n} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{2n!}{(n!)^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{2ne^{-2n}e(2n)^{2n}}{(n!)^2}} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{2n!}{(n!)^2}} \leq e^{-2}(2ne)^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{\frac{(2n)^{2n}}{(n!)^2}} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{2n!}{(n!)^2}} \leq 4e^{-2}(2ne)^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(n!)^2}}$

De onde concluímos que sempre vale:

$$\sqrt[n]{\frac{2n!}{(n!)^2}} \leq 4e^{-2}(2ne)^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(n!)^2}} \tag{149}$$

De (148) e (149) e tomando o limite:

$$\lim_{n\to\infty} 4e^{-2}e^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(n!)^2}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n!}{(n!)^2}} \leq \lim_{n\to\infty} 4e^{-2}(2ne)^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(n!)^2}} \tag{150}$$

De (146) ou das desigualdades que resultaram em (146), podemos ver que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(n!)^2}} = e^2$ Aplicando o resultado ao lado em (150), vem que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n!}{(n!)^2}} = 4 \tag{151}$$

Aplicando (147) e (151) em (143) e usando que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n}} = 1$no lado esquerdo, podemos ver que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!e^{-n}e}{n!n!}} = \frac{4}{e} \tag{152}$$

Aplicando o resultado acima em (139) e usando que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$no lado direito de (139), se pode ver que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n n!}} = \frac{4}{e} \tag{153}$$

33.(Desafio Final/Somatórios-Filipe Moreira/Instituto Tecnológico de Aeronáutica-ITA-SP)Prove que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{154}$$

Solução:

Observe que:

$$csc^2(\pi z)=\frac{1}{sen^2(\pi z)}=\frac{1}{4sen^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)cos^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)}=\frac{sen^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)+cos^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{4sen^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)cos^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{cos^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)}+\frac{1}{sen^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)}\right)=$$
$$\frac{1}{4}\left(sec^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)+csc^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(csc^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{2}\right)+csc^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(csc^2\left(\frac{(z-1)\pi}{2}\right)+csc^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right)$$

De onde concluímos:

$$csc^2(\pi z)=\frac{1}{4}\left(csc^2\left(\frac{(z-1)\pi}{2}\right)+csc^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right) \tag{155}$$

Fazendo z=1/4, teremos:

$$2=\frac{1}{4}\left(csc^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+csc^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \tag{156}$$

Seja (156) nossa base de indução, como hipótese de indução suponha válido para um n que

$$1=\frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}csc^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}} \tag{157}$$

Aplicando (155) em (157), teremos:

$$1=\frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}csc^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{4}\left(csc^2\left(\frac{\left(\frac{(2k+1)}{2^{n+1}}-1\right)\pi}{2}\right)+csc^2\left(\frac{\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}{2}\right)\right) \tag{158}$$

$$=\frac{2}{4^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left(csc^2\left(\frac{(2k+1-2^{n+1})\pi}{2^{n+2}}\right)+csc^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)\right)= \tag{159}$$

$$=\frac{2}{4^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}csc^2\left(\frac{(2^{n+1}-(2k+1))\pi}{2^{n+2}}\right)+\frac{2}{4^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}csc^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right) \tag{160}$$

$$= \frac{2}{4^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} csc^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right) \tag{161}$$

Provando assim, por indução que vale:

$$1 = \frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} csc^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}} \tag{162}$$

Por outro lado, usando que $csc^2x = cot^2x + 1$, vem:

$$1 = \frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} cot^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}} + \frac{2 \times 2^{n-1}}{4^n} \tag{163}$$

$$\frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} cot^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} \tag{164}$$

Usando que $senx \leq x \leq tanx \Rightarrow cotx \leq \frac{1}{x} \leq cscx \Rightarrow cot^2x \leq \frac{1}{x^2} \leq csc^2x$, teremos:

$$\frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} cot^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}} \leq \frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{2^{2n+2}}{((2k+1)\pi)^2} \leq \frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} csc^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}} \tag{165}$$

E a desigualdade acima é equivalente a desigualdade abaixo:

$$\frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} cot^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}} \leq \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{8}{((2k+1)\pi)^2} \leq \frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} csc^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}} \tag{166}$$

Substituindo (162) e (164) em (166), teremos:

$$1 - \frac{1}{2^n} \leq \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{8}{((2k+1)\pi)^2} \leq 1 \tag{167}$$

Tomando o limite de n tendendo ao infinito em todas as partes da desigualdade (167), teremos:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{8}{((2k+1)\pi)^2} \leq \lim_{n\to\infty} 1 \tag{168}$$

Pelo teorema do confronto, isto implica que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \tag{169}$$

Para calcular a soma pedida basta observar que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{4^n}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{4^n}\right)\frac{\pi^2}{8}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\pi^2}{8}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2}=\frac{\pi^2}{24} \tag{170}$$

De onde finalmente segue que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{171}$$

34.(Mathematics Stack Exchange)The "sum and difference" formulas often come in handy, but it's not immediately obvious that they would be true.

$$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sen\alpha sen\beta$$

$$sen(\alpha \pm \beta) = cos\alpha sen\beta \pm sen\alpha cos\beta$$

So what I want to know is,

1.How can I prove that these formulas are correct? More importantly, how can I understand these formulas intuitively?

2.Ideally, I'm looking for answers that make no reference to Calculus, or to Euler's formula, although such answers are still encouraged, for completeness.

Solução: Vamos primeiro usar um resultado intermediário:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Este resultado é muito importante, e será usado algumas vezes na demonstração que se segue.

Vamos inscrever um triângulo em uma circunferência, sejam ω, γ, γ' seus ângulos.Pela lei dos cossenos sabemos que:

$$a^2 = b + c - 2bccos(\omega) \tag{172}$$

Aplicando a lei dos senos em cada lado a,b,c em (172), teremos:

$$4R^2sen^2(\omega) = 4R^2sen^2\gamma + 4R^2sen^2\gamma' - 8R^2sen\gamma sen\gamma' cos(\omega) \tag{173}$$

Dividindo tudo por $4R^2$ teremos:

$$sen^2\gamma + sen^2\gamma' - 2sen\gamma sen\gamma' cos(\omega) + cos^2(\omega) - 1 = 0 \tag{174}$$

Fazendo $cos(\omega) = x$, obtemos uma equação do segundo grau, veja:

$$sen^2\gamma + sen^2\gamma' - 2sen\gamma sen\gamma' x + x^2 - 1 = 0 \tag{175}$$

Lembrando da solução geral da equação do segundo grau, teremos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{176}$$

Calculemos seu discriminante, veja:

$\Delta = (-2sen\gamma sen\gamma')^2 - 4(1).(sen^2\gamma + sen^2\gamma' - 1) = 4(sen^2\gamma sen^2\gamma' - sen^2\gamma - sen^2\gamma' + 1) = 4(-sen^2\gamma'(1 - sen^2\gamma) + (1 - sen^2\gamma)) = (1 - sen^2\gamma)(1 - sen^2\gamma') = 4cos^2\gamma cos^2\gamma'$

De onde concluímos a igualdade:

$$\Delta = 4cos^2\gamma cos^2\gamma' \tag{177}$$

Além disso de (174), podemos ver que:

$$b = -2sen\gamma sen\gamma' \tag{178}$$

Então de (176),(177) e (178) concluímos que:

$$x = cos(\omega) = sen\gamma sen\gamma' \pm cos\gamma cos\gamma' \tag{179}$$

Observe que $cos(\pi - x) = -cosx$ e note também que $\omega + \gamma + \gamma' = \pi$, daí concluímos que $cos(\omega) = -cos(\gamma + \gamma')$, substituindo em (179), teremos:

$$x = -cos(\gamma + \gamma') = sen\gamma sen\gamma' \pm cos\gamma cos\gamma' \tag{180}$$

Em outras palavras:

$$cos(\gamma + \gamma') = -sen\gamma sen\gamma' \mp cos\gamma cos\gamma' \tag{181}$$

Note que temos dois resultados para o delta, e isto nos coloca em dúvida sobre qual usar, mas este é um problema simples.Suponha, por absurdo, que a fórmula correta seja a expressão abaixo:

$$cos(\gamma + \gamma') = -sen\gamma sen\gamma' - cos\gamma cos\gamma' \tag{182}$$

Mas isto é absurdo, pois $cos(\pi - x) = -cosx$,$cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = senx$ e $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx$, daí segue, dessas fórmulas e de (179) , que $-cos(\gamma+\gamma') = cos(\pi-(\gamma+\gamma')) = -cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma'\right) - sen\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) sen\left(\frac{\pi}{2} - \gamma'\right) = -sen\gamma sen\gamma' - cos\gamma cos\gamma' \Rightarrow -cos(\gamma + \gamma') = -sen\gamma sen\gamma' - cos\gamma cos\gamma' \Rightarrow cos(\gamma + \gamma') = sen\gamma sen\gamma' + cos\gamma cos\gamma'$, este ultimo resultado é absurdo, e isto pode ser visto comparando-o com (182).Sendo assim, concluímos a demonstração.Como faríamos para achar uma fórmula para o cosseno da diferença?Como já sabemos somar, seria interessante que transformemos a diferença em soma...Para isto considere o seguinte desenvolvimento:

$-cos(x-y) = cos(\pi-(x-y)) = cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) - sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) sen\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = -cosxcosy - senxseny \Rightarrow cos(x - y) = cosxcosy + senxseny$

Concluindo assim o resultado, acima usamos apenas as fórmulas de redução de quadrante combinada com o cosseno da soma.As fórmulas para o seno são simples de se encontrar também , veja:

$-sen(x+y) = cos\left(\frac{3\pi}{2} - (x + y)\right) = cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + (\pi - y)\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) cos\,(\pi - y) -$

$sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right) sen\,(\pi-y) = -senxcosy - cosxseny \Rightarrow sen(x+y) = cosxseny + senxcosy$

Ainda:

$sen(x-y) = sen\,(\pi-(x-y)) = sen\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\left(\frac{\pi}{2}+y\right)\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) sen\left(\frac{\pi}{2}+y\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right) cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right) = senxcosy - cosxseny \Rightarrow sen(x-y) = senxcosy - cosxseny$

35.(Problema sugerido por Israel Meireles Chrisostomo)Dados seis números desconhecidos, encontre uma relação algébrica entre esses números, que envolva apenas os números em questão e somente as quatro operações, necessária e suficiente para que pelo menos um dentre esses seis números seja irracional.

Solução:
Sejam $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ esses números, seja o determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{183}$$

Vamos interpretar esses números como pontos no plano cartesiano.Observe que pela condição acima, os pares de variáveis com mesmo índice representam a coordenada de um ponto no plano cartesiano bidimensional.Pelo determinante acima, não há alinhamento entre estes pontos e, portanto, esses pontos formam um triângulo. Vamos provar que um triângulo equilátero, não pode possuir todas as coordenadas racionais, se provarmos isso, o problema simplesmente acaba, pois daí teremos uma outra condição incidente sobre as seis variáveis que satisfaça o enunciado.Supondo que esses pontos formam um triângulo equilátero, teremos:

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2} = \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2} = l \tag{184}$$

Em que cada termo na igualdade acima e a variável l, representam o lado do triângulo equilátero.Sabemos que a área do triângulo equilátero é dado por:

$$A_T = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \tag{185}$$

Substituindo quaisquer das equações de (184) em (185):

$$A_T = \frac{((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)\sqrt{3}}{4} \tag{186}$$

Observe que pela geometria analítica sabemos que a área é dada pelo determinante:

$$A_T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{187}$$

De (187) e (186):

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)\sqrt{3}}{2} \tag{188}$$

Observe que se todas as variáveis são racionais, então teremos um absurdo, pois um racional seria igual a um irracional.Disso concluímos que (183) e (184) são condições necessárias e suficientes para que haja entre seis números um irracional.

36. (Titu Andreescu-"103 Trigonometry Problems from the training of the USA IMO Team")Let ABC be a triangle. Prove that:

$$cosAcosBcosC \leq \frac{1}{8}$$

Solução 1: Há várias outras maneiras de se provar essa desigualdade, e o leitor pode encontrar uma demonstração mais simples aplicando alguns desigualdades provadas no meu primeiro PDF.Usando que $sen^2x+cos^2x=1$, segue que:

$$tanx + cotx = \frac{1}{senxcosx}$$

Daí seguem as identidades:

$$\frac{sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}}{sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}} = \left(tan\frac{\alpha}{2} + cot\frac{\alpha}{2}\right) sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2} \tag{189}$$

$$\frac{cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}}{sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}} = \left(tan\frac{\alpha}{2} + cot\frac{\alpha}{2}\right) cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2} \tag{190}$$

Somando (189) e (190):

$$\left(tan\frac{\alpha}{2} + cot\frac{\alpha}{2}\right) sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}+\left(tan\frac{\alpha}{2} + cot\frac{\alpha}{2}\right) cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2} = \frac{cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{1}{sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}$$

De onde concluímos:

$$\left(tan\frac{\alpha}{2} + cot\frac{\alpha}{2}\right)\left(cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2} + sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}\right) \leq \frac{1}{sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}} \tag{191}$$

Pelas transformações (26) e (27), teremos:

$$\left(\sqrt{\frac{xy}{z(x+y+z)}} + \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{xy}}\right) \times$$

$$\left(\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+z)(x+y)}}\sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(x+y)(y+z)}} + \sqrt{\frac{yz}{(x+z)(x+y)}}\sqrt{\frac{xz}{(x+y)(y+z)}}\right)$$

$$\leq \frac{(x+y)(y+z)}{\sqrt{xyz(x+y+z)}} \tag{192}$$

De (192) é possível ver que vale:

$$(xy+z(x+y+z))\left((x+y+z)\sqrt{xy}+z\sqrt{xy}\right) \leq (x+y)^2(y+z)\sqrt{(x+z)(y+z)} \tag{193}$$

A desigualdade acima é equivalente a:

$$(x+z)(y+z)\sqrt{xy}\,(x+y+2z) \leq (x+y)^2(y+z)\sqrt{(x+z)(y+z)} \tag{194}$$

Que com o devido cancelamento se reduz à desigualdade abaixo:

$$(x+z)\sqrt{xy}\,(x+y+2z) \leq (x+y)^2\sqrt{(x+z)(y+z)} \tag{195}$$

Aplicando o mesmo raciocínio acima para os outros ângulos concluímos as desigualdades:

$$(x+y)\sqrt{yz}\,(2x+y+z) \leq (y+z)^2\sqrt{(x+z)(x+y)} \tag{196}$$

$$(y+z)\sqrt{xz}\,(x+2y+z) \leq (x+z)^2\sqrt{(y+z)(x+y)} \tag{197}$$

Multiplicando (195),(196) e (197), teremos:

$$xyz(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z) \leq [(x+z)(x+y)][(y+z)(x+y)][(x+z)(y+z)] \tag{198}$$

Suponha $xy+xz+yz=1$, note que x,y e z serão cotangentes de ângulos de um triângulo agudo, daí segue

$[(x+z)(x+y)][(y+z)(x+y)][(x+z)(y+z)] =$

$[x^2+xy+xz+yz][y^2+xy+xz+yz][z^2+xy+xz+yz] =$

$[x^2+1][y^2+1][z^2+1] = [cot^2\alpha'+1][cot^2\beta'+1][cot^2\gamma'+1] = csc^2\alpha' csc^2\beta' csc^2\gamma'$

De onde podemos ver que (198) é equivalente a:

$$cot\alpha' cot\beta' cot\gamma'\,(2cot\alpha'+cot\beta'+cot\gamma')\,(cot\alpha'+2cot\beta'+cot\gamma')\,(cot\alpha'+cot\beta'+2cot\gamma') \leq$$

$$csc^2\alpha' csc^2\beta' csc^2\gamma' \tag{199}$$

Extraindo a raiz cúbica em ambos os lados da desigualdade, teremos:

$$(cot\alpha' cot\beta' cot\gamma')^{\frac{1}{3}}\,(2cot\alpha'+cot\beta'+cot\gamma')^{\frac{1}{3}}\,(cot\alpha'+2cot\beta'+cot\gamma')^{\frac{1}{3}}\,(cot\alpha'+cot\beta'+2cot\gamma')^{\frac{1}{3}} \leq$$

$$csc^{\frac{2}{3}}\alpha' csc^{\frac{2}{3}}\beta' csc^{\frac{2}{3}}\gamma' \tag{200}$$

Pela Desigualdade de Holder em três variáveis $\left(\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c = \dfrac{1}{3}\right)$ segue que:

$$4(cot\alpha' cot\beta' cot\gamma')^{\frac{1}{3}} \leq (2cot\alpha' + cot\beta' + cot\gamma')^{\frac{1}{3}} (cot\alpha' + 2cot\beta' + cot\gamma')^{\frac{1}{3}} (cot\alpha' + cot\beta' + 2cot\gamma')^{\frac{1}{3}} \tag{201}$$

Multiplicando (201) por $(cot\alpha' cot\beta' cot\gamma')^{\frac{1}{3}}$, chegamos em:

$$4(cot\alpha' cot\beta' cot\gamma')^{\frac{2}{3}} \leq$$

$$(cot\alpha' cot\beta' cot\gamma')^{\frac{1}{3}} (2cot\alpha' + cot\beta' + cot\gamma')^{\frac{1}{3}} (cot\alpha' + 2cot\beta' + cot\gamma')^{\frac{1}{3}} (cot\alpha' + cot\beta' + 2cot\gamma')^{\frac{1}{3}} \tag{202}$$

De (202) e (200), chega-se por transitividade à desigualdade abaixo:

$$4(cot\alpha' cot\beta' cot\gamma')^{\frac{2}{3}} \leq csc^{\frac{2}{3}}\alpha' csc^{\frac{2}{3}}\beta' csc^{\frac{2}{3}} \tag{203}$$

Podemos supor sem perda de generalidade que os ângulos estão no primeiro quadrante, sendo assim podemos extrair a raiz e preservar o sinal da desigualdade, pois por essa hipótese todos os termos são positivos...Portanto, extraindo a raiz quadrada e elevando ao cubo, nossa desigualdade é equivalente a desigualdade requerida no problema.

Solução 2: Nós vamos proceder aqui, semelhantemente ao problema 5.Veja:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \tag{204}$$

$$x + z \geq 2\sqrt{xz} \tag{205}$$

$$y + z \geq 2\sqrt{yz} \tag{206}$$

Multiplicando (204), (205) e (206):

$$(x + y)(x + z)(y + z) \geq 8xyz$$
$$\frac{1}{8} \geq \frac{xyz}{(x + y)(x + z)(y + z)}$$
$$\frac{1}{8} \geq \sqrt{\frac{xy}{(x + z)(y + z)}}\sqrt{\frac{xz}{(x + y)(y + z)}}\sqrt{\frac{yz}{(x + y)(x + z)}}$$

Pela transformação 26, segue :

$$\frac{1}{8} \geq sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}$$
$$\frac{1}{8} \geq cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$$

Considere a substituição $\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} = A, \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} = B, \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} = C$, então, nós teremos $A + B + C = \pi$ e:

$$\frac{1}{8} \geq cosAcosBcosC$$

Solução 3:

Pela desigualdade das médias e pela lei dos cossenos, sabemos que:

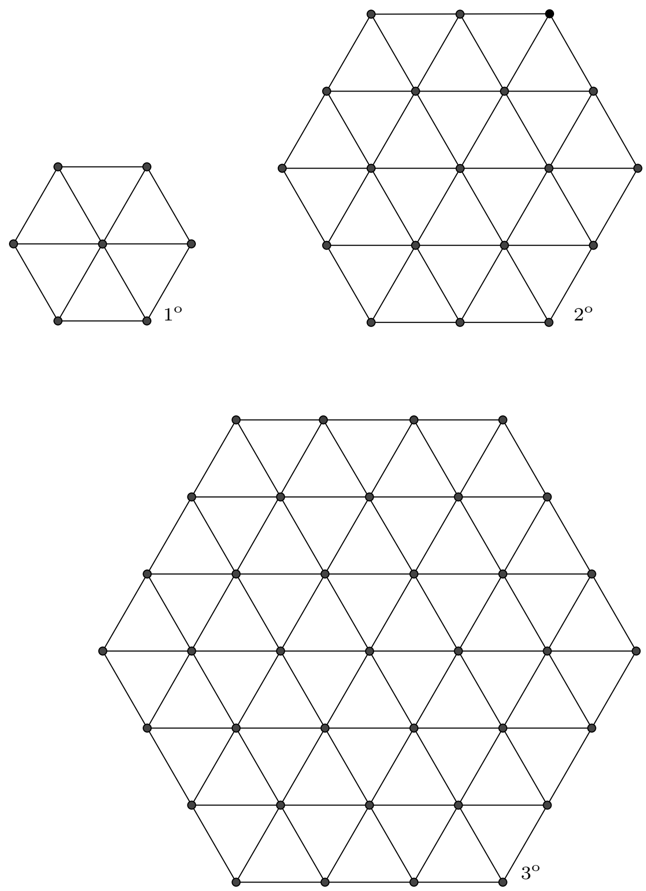
$$4a^4 = ((a^2+b^2-c^2)+(a^2+c^2-b^2))^2 \geq 4(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2) = 16a^2bccos\beta cos\gamma \Rightarrow a^2 \geq 4bccos\beta cos\gamma \quad \text{(A)}$$

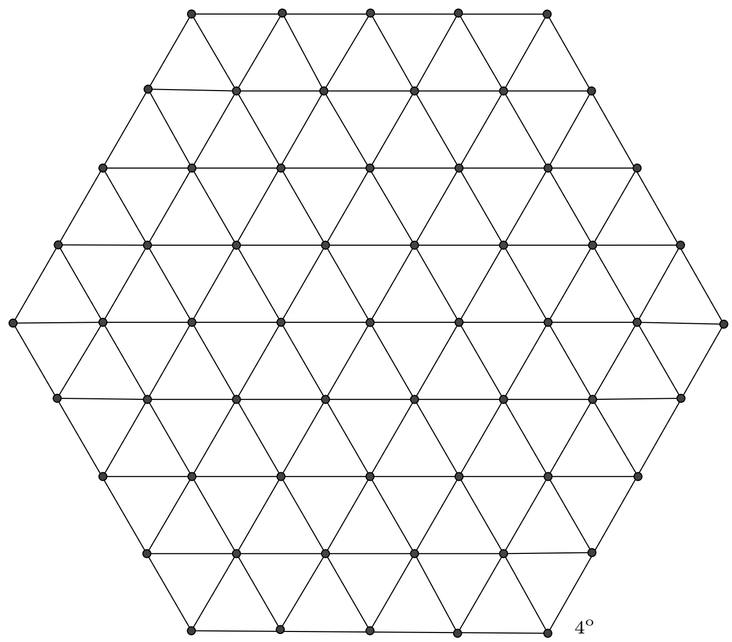
$$4b^4 = ((a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2))^2 \geq 4(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2) = 16ab^2ccos\alpha cos\gamma \Rightarrow b^2 \geq 4accos\alpha cos\gamma \quad \text{(B)}$$

$$4c^4 = ((a^2+c^2-b^2)+(b^2+c^2-a^2))^2 \geq 4(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2) = 16abc^2cos\alpha cos\beta \Rightarrow c^2 \geq 4abcos\alpha cos\beta \quad \text{(C)}$$

Multiplicando A,B e C e extraindo a raiz(supondo, sem perda de generalidade, que alpha, beta e gamma estão no primeiro quadrante) teremos a desigualdade requerida.

37.(Problema sugerido por Israel Meireles Chrisostomo) Com palitos como o que está acima e de tamanhos iguais, se constroem hexágonos regulares cada vez maiores, formados por pequenos triângulos equiláteros, como os que estão abaixo:





4º

Responda:

a)Com quantos palitos se pode construir um hexágono com 6 milhões de pequenos triângulos equiláteros?

b)Se chamarmos esse hexágono de k-ésimo hexágono da sequência, qual seria o valor de k?

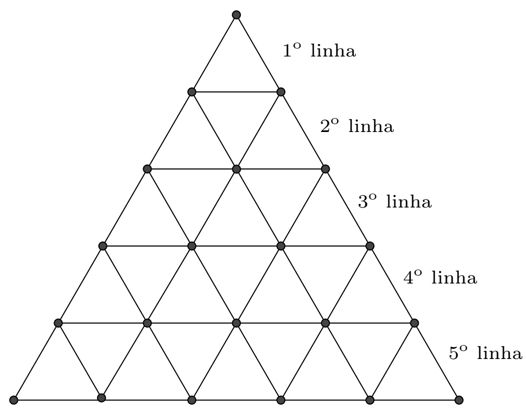
c)Mostre uma fórmula que relacione o número de palitos com o número de triângulos equiláteros da figura.

d)Se fizermos 6 milhões e uma cópias do milionésimo hexágono, deveríamos construir uma sequência com quantos hexágonos, para que o número de triângulos contidos em toda essa sequência de hexágonos seja igual ao número de palitos contados em todas essas cópias?

e)É possível que uma sequência de hexágonos contenha uma quantidade total de palitos que seja quadrado perfeito?Em caso afirmativo, mostre onde isto **sempre** ocorre.

Solução:

Primeiramente observe que um hexágono regular é composto por 6 triângulos equiláteros. Nossa estratégia é olhar para o número de pequenos triângulos equiláteros que há em cada triângulo equilátero grande.Vamos olhar apenas para o triângulo equilátero grande de um desses hexágonos, é como se tivéssemos uma pizza hexagonal e a repartíssemos em seis pedaços iguais, veja (no exemplo abaixo seria uma parte do quinto hexágono da sequencia formada pelos palitos, ou o o pedaço correspondente a 1/6 da quinta pizza):



Observe a lei de formação do triângulo equilátero e note que em cada k-ésima linha temos k triângulos para cima e k-1 triângulos para baixo (por exemplo na linha 1, temos 1 triângulo para cima e 1-1=0 para baixo,na linha 2 temos 2 triângulos para cima e 2-1=1 para baixo).Podemos construir uma relação com o número de triângulos para cima e para baixo com o valor que representa aquela linha, veja:

1º linha: 1 triângulo para cima, 0 triângulos para baixo.Total:1 triângulo.

2º linha: 2 triângulos para cima, 1 triângulo para baixo.Total:3 triângulos.

3º linha: 3 triângulos para cima, 2 triângulos para baixo.Total:5 triângulos.

4º linha: 4 triângulos para cima, 3 triângulos para baixo.Total:7 triângulos.

5º linha: 5 triângulos para cima, 4 triângulos para baixo.Total:9 triângulos.

...

...

k-ésima linha: k triângulos para cima, k-1 triângulos para baixo.Total:2k-1 triângulos.

Como o total de triângulos em uma linha é sempre ímpar, o total de triângulos em uma fatia da pizza corresponde a soma desses k primeiros ímpares, isto é:

$$t = k^2 \tag{1}$$

Como temos seis triângulos grandes no hexágono, devemos multiplicar por 6, para obter a quantidade t_h de triângulos pequenos no hexágono, sendo assim:

$$t_h = 6k^2 \tag{2}$$

Agora observe que a quantidade p_t de palitos para formar um triângulo grande é $3(n+1)n/2$ (basta contar os palitos dos triângulos com o vértice voltado para cima , que são os únicos que fazem diferença na contagem, e perceber que isso é a soma do k naturais multiplicado por 3-cada triângulo tem 3 palitos).Sendo assim:

$$p_t = 3(k+1)k/2 \tag{3}$$

Como a quantidade de triângulos equiláteros em um hexágono é 6, devemos multiplicar a fórmula acima por 6 e descontar os palitos que foram contados a mais, e assim obter a quantidade total de palitos para formar o hexágono. Quando multiplicamos por seis, os lados que se interceptam foram contados duas vezes, enfim temos seis lados contados a mais, como cada lado do triângulo equilátero contém k linhas, devemos multiplicar p_t por 6e subtrair $6k$ para obter o número n_p de palitos do hexágono, sendo assim:

$$n_p = 6p_t - 6k = 9(k+1)k - 6k = 3k(3k+1)$$

$$n_p = 3k(3k+1) \tag{4}$$

Pronto!Agora ficou fácil, basta substituirmos os valores que quisermos!As equações que nos interessam são (2) e (4)!Se tivermos 6 milhões de triângulos devemos ter:

$$6000000 = 6k^2 \Rightarrow 1000000 = k^2 \Rightarrow k = \sqrt{1000000} \Rightarrow k = 1000$$

Substituindo em (4), devemos ter $n_p = 3\times1000(3\times1000+1) = 3000\times3001 = 9003000 = 9$ milhões e 3 mil palitos.

Para encontrarmos uma fórmula que relaciona o número de palitos com o número de triângulos equiláteros, podemos isolar t_h em (2), de onde obteremos:

$$k = \frac{\sqrt{6}\sqrt{t_h}}{6} \tag{5}$$

Substituindo (5) em (4), finalmente teremos:

$$n_p(t_h) = \frac{\sqrt{6}\sqrt{t_h}}{2}\left(\frac{\sqrt{6}\sqrt{t_h}}{2} + 1\right) \tag{4}$$

Onde $n_p(t_h)$ é o número de palitos dado em função de t_h, que é o número de triângulos no hexágono!Como sabemos que t_h é um múltiplo de 6 e também múltiplo de um quadrado perfeito, o número de palitos sempre é inteiro.Legal né?

d)Essa questão exige um conhecimento prévio de somatório, e parece apontar uma relação muito interessante.Antes, considere que 6 milhões e 1 é um número na forma $6k+1$.

Considere também que:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{207}$$

Sabemos que cada hexágono contém uma quantidade de triângulos equiláteros, que é um quadrado perfeito multiplicado por 6.Sendo assim, ao passarmos o 6 multiplicando na relação acima, obteremos a quantidade t_s de triângulos equiláteros em uma sequência do primeiro até o n-ésimo hexágono, ou seja:

$$t_s = 6\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1) \tag{208}$$

Por outro lado, sabemos que a quantidade de palitos em um hexágono é $3n(3n+1)$, se fizermos 6n+1 cópias do hexágono regular teremos
$3n(3n+1)(6n+1)$ palitos, para que a quantidade t_s seja igual a essa quantidade de palitos, basta substituirmos n por 3n em (208), e teremos o resultado desejado.

e)Considere que a quantidade total de palitos do k-ésimo hexágono vale $3k(3k+1) = 9k^2 + 3k$.Então se tivermos uma sequência do primeiro até o n-ésimo palito, a quantidade p_s de palitos dessa sequência é dada pelo somatório:

$$p_s = \sum_{k=1}^{n}(9k^2 + 3k) = 9\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k \tag{209}$$

Como $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ .Teremos:

$$p_s = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{3n(n+1)(2n+2)}{2} = 3n(n+1)^2 \tag{210}$$

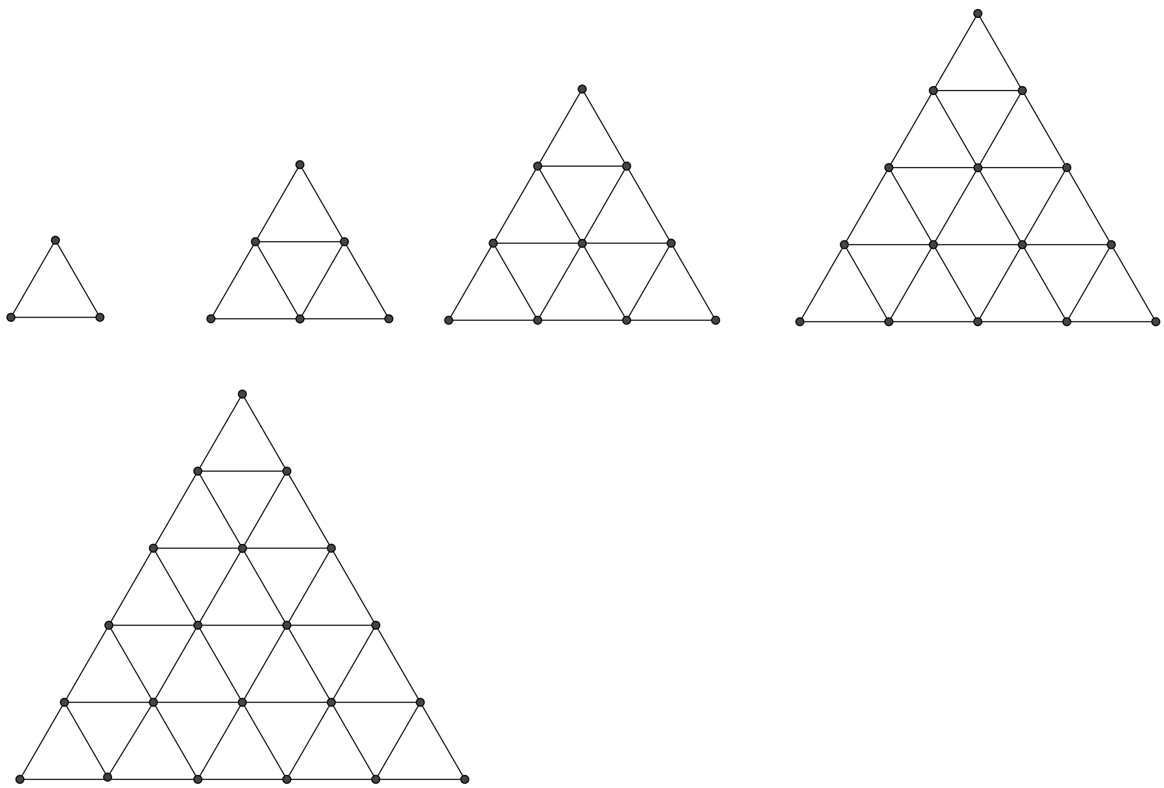
Sendo assim, teremos:

$$p_s = 3n(n+1)^2 \tag{211}$$

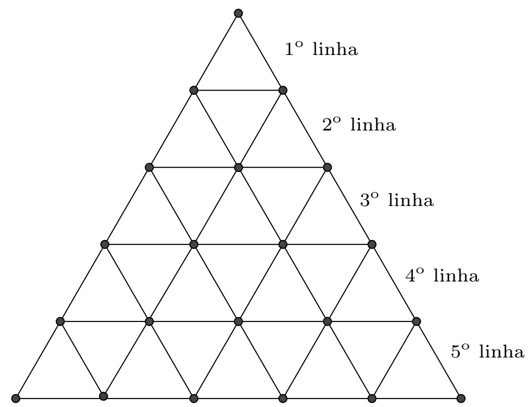
é possível ver por essa fórmula, que para todo n na forma $3j^2, j \in \mathbb{N}$, o total de palitos de um sequência começando pelo primeiro hexágono e terminando no n-ésimo hexágono (com $n = 3k^2$) será quadrado perfeito.

38.(Problema sugerido por Israel Meireles Chrisostomo)Use um argumento geométrico para demonstrar que a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2.

Solução:
Essa questão foi baseada na anterior.Construa uma sequência de triângulos equiláteros desenhados sobre outros triângulos equiláteros, como a que está abaixo:



Veja o padrão:



Observe a lei de formação do triângulo equilátero e note que em cada k-ésima linha temos k triângulos para cima e k-1 triângulos para baixo (por exemplo na linha 1, temos 1 triângulo para cima e 1-1=0 para baixo,na linha 2 temos 2 triângulos para cima e 2-1=1 para baixo), além disso cada k-ésima linha contém um número ímpar de triângulos equiláteros.Podemos construir "uma tabela" com o número de triângulos para cima e para baixo com o valor que representa aquela linha, veja a tabela abaixo:

1º linha: 1 triângulo para cima, 0 triângulos para baixo.Total:1 triângulo.

2º linha: 2 triângulos para cima, 1 triângulo para baixo.Total:3 triângulos.

3º linha: 3 triângulos para cima, 2 triângulos para baixo.Total:5 triângulos.

4º linha: 4 triângulos para cima, 3 triângulos para baixo.Total:7 triângulos.

5º linha: 5 triângulos para cima, 4 triângulos para baixo.Total:9 triângulos.

...

...

k-ésima linha: k triângulos para cima, k-1 triângulos para baixo.Total:2k-1 triângulos.

Como a quantidade t de triângulos que há em um triângulo grande é a soma da quantidade de triângulos pequenos, e sabemos que a soma dos k primeiros naturais k(k+1)/2 e que a soma dos k-1 primeiros naturais (k-1)k/2, teremos que $t = k(k+1)/2 + (k-1)k/2 = k^2$, em que k é a k-ésima linha.Sendo assim teremos:

$$t = k^2 \tag{1}$$

Como é possível demonstrar geometricamente que a soma dos n primeiros naturais é n(n+1)/2, a demonstração geométrica segue diretamente.

39.("Putnam and Beyond"-Titu Andreescu) Prove for all positive integers n the identity

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

Solução: Vamos fazer a prova por indução.Para o caso base considere n=1.Como hipótese de indução, considere:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

Como tese de indução tome:

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n+2}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$$

Some $\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$ nos dois lados da hipótese de indução e o resultado segue provado.

40. Encontre uma expressão fechada para a soma:

$$sen(\phi+\theta)+2sen(\phi+2\theta)+3sen(\phi+3\theta)+...+nsen(\phi+n\theta)=\sum_{k=1}^{n}ksen(k\theta+\phi)$$

Solução 1: Defina uma função $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}$ tal que:

$$f_n(\theta)=sen(\phi+\theta)+sen(\phi+2\theta)+sen(\phi+3\theta)+...+sen(\phi+n\theta) \qquad (212)$$

Considere as operações algébricas abaixo, que podemos fazer com essa função:

$$n(f_n(\theta)-f_{n-1}(\theta))=nsen(\phi+n\theta) \qquad \text{(n-ésima igualdade)}$$
$$(n-1)(f_{n-1}(\theta)-f_{n-2}(\theta))=(n-1)sen(\phi+(n-1)\theta) \qquad \text{((n-1)-ésima igualdade)}$$
$$(n-2)(f_{n-2}(\theta)-f_{n-3}(\theta))=(n-2)sen(\phi+(n-2)\theta) \qquad \text{((n-2)-ésima igualdade)}$$

...

...

...

$$2(f_2(\theta)-f_1(\theta))=2sen(\phi+2\theta) \qquad \text{(segunda igualdade)}$$
$$f_1(\theta)=sen(\phi+\theta) \qquad \text{(primeira igualdade)}$$

Somando da primeira igualdade até a n-ésima igualdade, teremos:

$$nf_n(\theta)-f_{n-1}(\theta)-f_{n-2}(\theta)-....-f_1(\theta)=\sum_{k=1}^{n}ksen(k\theta+\phi) \qquad (213)$$

Da igualdade acima e pela solução da questão 17, concluímos:

$$\sum_{k=1}^{n}ksen(k\theta+\phi)=\frac{nsen\left(\frac{n\theta}{2}\right)sen\left(\phi+\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{sen\frac{\theta}{2}}-\frac{sen\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right)sen\left(\phi+\frac{n\theta}{2}\right)}{sen\frac{\theta}{2}}-....-\frac{sen\left(\frac{\theta}{2}\right)sen\left(\theta+\phi\right)}{sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}=$$

$$\frac{nsen\left(\frac{n\theta}{2}\right)sen\left(\phi+\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{2sen\frac{\theta}{2}}+\frac{cos\left(\frac{(2n-1)\theta}{2}+\phi\right)-cos\left(\phi+\frac{\theta}{2}\right)}{2sen\frac{\theta}{2}}+...+\frac{cos\left(\frac{3\theta}{2}+\phi\right)-cos\left(\phi+\frac{\theta}{2}\right)}{2sen\frac{\theta}{2}}=$$

$$\frac{nsen\left(\frac{n\theta}{2}\right)sen\left(\phi+\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{sen\frac{\theta}{2}}+\frac{cos\left(\frac{(2n-1)\theta}{2}+\phi\right)}{2sen\frac{\theta}{2}}+...+\frac{cos\left(\frac{3\theta}{2}+\phi\right)}{2sen\frac{\theta}{2}}-\frac{(n-1)cos\left(\phi+\frac{\theta}{2}\right)}{2sen\frac{\theta}{2}}$$

Somando e subtraindo $\dfrac{cos\left(\frac{\theta}{2}+\phi\right)}{2sen\frac{\theta}{2}}$ logo acima, teremos:

$$\sum_{k=1}^{n} ksen(k\theta+\phi) = \frac{nsen\left(\frac{n\theta}{2}\right)sen\left(\phi+\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{sen\frac{\theta}{2}} + \frac{cos\left(\frac{(2n-1)\theta}{2}+\phi\right)}{2sen\frac{\theta}{2}} + ... + \frac{cos\left(\frac{\theta}{2}+\phi\right)}{2sen\frac{\theta}{2}} - \frac{ncos\left(\phi+\frac{\theta}{2}\right)}{2sen\frac{\theta}{2}} \tag{214}$$

Observe que temos uma soma de valores ímpares de cossenos no lado direito, ora, mas uma soma de valores ímpares é o mesmo que uma soma geral menos os termos pares, com um leve ajuste no denominador, que é 2, basta alterar o valor de theta.Veja como podemos chegar a esse resultado.Primeiramente considere provado o somatório (o leitor pode prová-lo facilmente com o raciocínio semelhante ao usado na questão 17):

$$\sum_{k=1}^{n} cos(k\theta+\phi) = \frac{sen\left(\frac{n\theta}{2}\right)cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}+\phi\right)}{sen\frac{\theta}{2}} \tag{215}$$

Substituindo n por 2n em (215), teremos:

$$\sum_{k=1}^{2n} cos(k\theta+\phi) = \frac{sen\,(n\theta)\,cos\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}+\phi\right)}{sen\frac{\theta}{2}} \tag{216}$$

Substituindo theta por 2theta em (215), teremos:

$$\sum_{k=1}^{n} cos(2k\theta+\phi) = \frac{sen\,(n\theta)\,cos\,((n+1)\theta+\phi)}{sen\theta} \tag{217}$$

Subtraindo (216) com (217), teremos:

$$\sum_{k=1}^{n} cos((2k-1)\theta+\phi) = \frac{sen\,(n\theta)}{sen\theta sen\frac{\theta}{2}}\left(sen\theta cos\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}+\phi\right) - sen\frac{\theta}{2}cos\,((n+1)\theta+\phi)\right) =$$

$$\frac{sen\,(n\theta)}{sen\theta sen\frac{\theta}{2}}\left(2sen\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}cos\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}+\phi\right) - sen\frac{\theta}{2}cos\,((n+1)\theta+\phi)\right) =$$

$$\frac{sen\,(n\theta)}{sen\theta}\left(2cos\frac{\theta}{2}cos\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}+\phi\right) - cos\,((n+1)\theta+\phi)\right) =$$

$$\frac{sen\,(n\theta)}{sen\theta}\left(cos\,((n+1)\theta+\phi) + cos\,(n\theta+\phi) - cos\,((n+1)\theta+\phi)\right) =$$

$$\frac{sen\,(n\theta)\,cos\,(n\theta+\phi)}{sen\theta}$$

De onde concluímos:

$$\sum_{k=1}^{n} cos((2k-1)\theta+\phi) = \frac{sen\,(n\theta)\,cos\,(n\theta+\phi)}{sen\theta}$$

Finalmente, subsituindo theta por theta/2 na expressão acima, teremos:

$$\sum_{k=1}^{n} cos\left(\frac{(2k-1)\theta}{2}+\phi\right) = \frac{sen\left(\frac{n\theta}{2}\right) cos\left(\frac{n\theta}{2}+\phi\right)}{sen\frac{\theta}{2}} \tag{218}$$

Substituindo (218) em (214), vem:

$$\sum_{k=1}^{n} ksen(k\theta+\phi) = \frac{nsen\left(\frac{n\theta}{2}\right) sen\left(\phi+\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{sen\frac{\theta}{2}} + \frac{sen\left(\frac{n\theta}{2}\right) cos\left(\frac{n\theta}{2}+\phi\right)}{2sen^2\frac{\theta}{2}} - \frac{ncos\left(\phi+\frac{\theta}{2}\right)}{2sen\frac{\theta}{2}} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} ksen(k\theta+\phi) = \frac{ncos\left(\phi+\frac{\theta}{2}\right) - ncos\left(\phi+\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{2sen\frac{\theta}{2}} + \frac{sen\left(\frac{n\theta}{2}\right) cos\left(\frac{n\theta}{2}+\phi\right)}{2sen^2\frac{\theta}{2}} - \frac{ncos\left(\phi+\frac{\theta}{2}\right)}{2sen\frac{\theta}{2}} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} ksen(k\theta+\phi) = -\frac{ncos\left(\phi+\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{2sen\frac{\theta}{2}} + \frac{sen\left(\frac{n\theta}{2}\right) cos\left(\frac{n\theta}{2}+\phi\right)}{2sen^2\frac{\theta}{2}} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} ksen(k\theta+\phi) = \frac{sen\left(\frac{n\theta}{2}\right) sen\left(\frac{n\theta}{2}+\phi\right) - nsen\left(\frac{\theta}{2}\right) cos\left(\phi+\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{2sen^2\frac{\theta}{2}} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} ksen(k\theta+\phi) = \frac{sen(n\theta+\phi) - sen(\phi) - n(sen(\phi+(n+1)\theta) - sen(n\theta+\phi))}{4sen^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} ksen(k\theta+\phi) = \frac{-nsen(\phi+(n+1)\theta)+(n+1)sen(n\theta+\phi) - sen\phi}{2(1-cos\theta)}$$

152

Solução 2: Derive a soma de cossenos com argumentos em P.A..

41.("Putnam and Beyond"-Titu Andreescu e Razvan Gelca)Prove that the sequence $(a_n)_{n\geq 1}$ defined by

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - ln(n+1), n \geq 1$$

is convergent.

Solução: Seja f uma função contínua decrescente, então vale:

$$f(2) + ... + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + ... + f(n-1) \qquad (219)$$

Fazendo $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em (219), teremos:

$$\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{x}dx \leq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1} \qquad (220)$$

Mas observe que:

$\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}dx = ln(n) - ln1 = ln(n)$, substituindo este resultado em (220), teremos:

$$\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \leq ln(n) \leq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1} \qquad (221)$$

Multiplicando (221) por -1 e somando $1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n-1}$, temos:

$$0 \leq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1} - ln(n) \leq 1 - \frac{1}{n} \qquad (222)$$

Tomando o limite em todas as partes da desigualdade acima, teremos:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1} - ln(n)\right) \leq 1 \qquad (223)$$

O resultado segue pelo teorema de Weierstrass, que diz que toda sequência monótona limitada é convergente.

42. Prove que π é irracional.

Solução:

É fácil provar, usando complexos, que vale a igualdade abaixo:

$$sen(2nz) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k (cosz)^{2n-(2k+1)} (senz)^{2k+1} \tag{224}$$

Multiplicando (1) por $\dfrac{cosz}{sen^{2n+1}z}$, podemos deduzir a igualdade abaixo:

$$\frac{coszsen(2nz)}{sen^{2n+1}z} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k cot^{2(n-k)}(z) \tag{225}$$

Fazendo $cot^2 z = \zeta$, obtemos um polinômio na variável ζ, a saber:

$$\frac{coszsen(2nz)}{sen^{2n+1}z} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k \zeta^{n-k} \tag{226}$$

Que é um polinômio de grau n em ζ.Como ζ está em função de z, podemos encontrar as raízes deste polinômio pelo seno ao lado esquerdo, pois como se trata de uma igualdade o mesmo ângulo que anula o esquerdo anula também o direito.Sendo assim as raízes saem do seno ao lado esquerdo, então, vem:
$sen(2nz) = 0 \Rightarrow 2nz = k\pi \Rightarrow z = \dfrac{k\pi}{2n}, k \in \mathbb{N}^* | k \leq n$

Sendo assim suas raízes são:

$$\zeta_k = cot^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right), k \in \mathbb{N}^* | k \leq n \tag{227}$$

Suponha que π seja um racional na forma $\pi = \dfrac{p}{q}$, com p e q inteiros, então teremos:

$$q\pi = p \tag{228}$$

Teorema.O número π é irracional.

Demonstração: Substituindo 2n por $n!p$ na igualdade (225), teremos:

$$\frac{cos(z)sen(n!pz)}{sen^{n!p+1}(z)} = \frac{cos(z)sen(n!q\pi z)}{sen^{n!p+1}(z)} = \sum_{k=0}^{\frac{n!p}{2}} \binom{n!p}{2k+1} (-1)^k cot^{(n!p-2k)}(z) \tag{229}$$

Note que 1 é um argumento que anula o polinômio acima, por outro lado, $cot1$ é transcendente, o que é um absurdo.

43. Prove novamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Solução:
Vamos provar por indução que vale a igualdade:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}(a_kb_j - a_jb_k)^2 + (a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 = (a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)$$

Vamos primeiro verificar a base de indução para n=3. Observe que se definirmos $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$, teremos:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| =$$
$$\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\right\| = \sqrt{(a_2b_1 - a_1b_2)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (b_3a_1 - b_1a_3)^2}$$

Daí segue que:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = (a_2b_1 - a_1b_2)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (b_3a_1 - b_1a_3)^2 \tag{230}$$

Por outro lado, temos:

$$\vec{u}.\vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{231}$$

Somando (230) com o quadrado de (231) teremos:

$$(a_2b_1-a_1b_2)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(b_3a_1-b_1a_3)^2+(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 = ||\vec{u} \times \vec{v}||^2+(\vec{u}.\vec{v})^2$$

Multiplicando e dividindo a expressão acima por $(||\vec{u}||||\vec{v}||)^2$, teremos:

$$(a_2b_1-a_1b_2)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(b_3a_1-b_1a_3)^2+(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 = (||\vec{u}||||\vec{v}||)^2\left(\frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2}{(||\vec{u}||||\vec{v}||)^2} + \frac{(\vec{u}.\vec{v})^2}{(||\vec{u}||||\vec{v}||)^2}\right) \tag{232}$$

Seja θ o ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Observe agora que $sen(\theta) = \dfrac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{||\vec{u}||||\vec{v}||}$ e $cos(\theta) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||}$, substituindo em (232) teremos:

$$(a_2b_1-a_1b_2)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(b_3a_1-b_1a_3)^2+(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 = (||\vec{u}||||\vec{v}||)^2\left(sen^2\theta + cos^2\theta\right) \tag{233}$$

Usando que $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$ para todo theta real, teremos:

$$(a_2b_1-a_1b_2)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(b_3a_1-b_1a_3)^2+(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 = (||\vec{u}||||\vec{v}||)^2 \tag{234}$$

Usando que $||\vec{u}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ e $||\vec{v}|| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, finalmente segue:

$$(a_2b_1-a_1b_2)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(b_3a_1-b_1a_3)^2+(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \tag{235}$$

Como hipótese de indução, suponha válido para um n a igualdade abaixo:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}(a_kb_j-a_jb_k)^2+(a_1b_1+...+a_nb_n)^2 = (a_1^2+...+a_n^2)(b_1^2+...+b_n^2) \tag{236}$$

Observe que

$$(a_1b_1+...+a_nb_n)a_{n+1}b_{n+1}+(a_1b_1+...+a_nb_n+a_{n+1}b_{n+1})a_{n+1}b_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(a_{n+1}b_k-a_kb_{n+1})^2 =$$

$$(a_{n+1}^2b_1^2 + ... + a_{n+1}^2b_n^2) + (a_1^2b_{n+1}^2 + ... + a_n^2b_{n+1}^2) + a_{n+1}^2b_{n+1}^2 \tag{237}$$

Somando a igualdade (236) com (237), teremos:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}(a_kb_j - a_jb_k)^2 + (a_1b_1 + ... + a_{n+1}b_{n+1})^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_{n+1}b_k - a_kb_{n+1})^2 =$$

$$(a_1^2+...+a_n^2)(b_1^2+...+b_n^2)+(a_{n+1}^2b_1^2+...+a_{n+1}^2b_n^2)+(a_1^2b_{n+1}^2+...+a_n^2b_{n+1}^2)+a_{n+1}^2b_{n+1}^2 =$$

$$(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) + a_{n+1}^2(b_1^2 + ... + b_n^2) + b_{n+1}^2(a_1^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1}^2) =$$

$$(a_1^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1}^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) + b_{n+1}^2(a_1^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1}^2) =$$

$$(a_1^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1}^2)(b_1^2 + ... + b_n^2 + b_{n+1}^2) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}(a_kb_j - a_jb_k)^2 + (a_1b_1 + ... + a_{n+1}b_{n+1})^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_{n+1}b_k - a_kb_{n+1})^2 =$$

$$(a_1^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1}^2)(b_1^2 + ... + b_n^2 + b_{n+1}^2) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n+1}(a_kb_j - a_jb_k)^2 + (a_1b_1 + ... + a_{n+1}b_{n+1})^2 =$$

$$(a_1^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1}^2)(b_1^2 + ... + b_n^2 + b_{n+1}^2)$$

Provando assim por indução que (236) vale[15].Usando que o quadrado de todo número real é maior ou igual a zero em (236), a desigualdade de Cauchy-Schwarz segue demonstrada.

[15](236) é conhecido como Identidade de Lagrange, curioso o fato que antes de provar a desigualdade de Cauchy Schwarz dessa forma eu não conhecia essa identidade.Só fui conhecer essa identidade após uma pesquisa na internet para verificar a correção das ideias envolvidas na demonstração dessa Desigualdade, depois de já ter obtido o resultado por indução.

44.(Vardan Verdiyan-“Simple trigonometric substitution with broads results”)Let x,y,z real numbers greater than 1 such that $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Prove that:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\leq\sqrt{x+y+z}$$

Solução:

Vamos usar a notação $\sum_{cyc} sen\alpha sen\beta = sen\alpha sen\beta + sen\alpha sen\gamma + sen\beta sen\gamma$.Observe que nossa condição para que a desigualdade seja verdadeira é equivalente a:

$$\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{x}+\frac{z-1}{z}=1$$

Faça a seguinte substituição:

$$a=\sqrt{\frac{x(y-1)(z-1)}{(x-1)yz}}$$

$$b=\sqrt{\frac{y(x-1)(z-1)}{(y-1)xz}}$$

$$c=\sqrt{\frac{z(x-1)(y-1)}{(z-1)xy}}$$

Observe que dessa forma teremos:

$$ab=\frac{z-1}{z}$$

$$ac=\frac{y-1}{x}$$

$$bc=\frac{x-1}{x}$$

De onde podemos ver que podemos reescrever nossa condição como $ab+bc+ac=1$, observe que a,b,c são tangentes cujos argumentos são metade de uma ângulo de triângulo.Essa substituição implica nas igualdades abaixo:

$$x=\frac{1}{1-bc}$$

$$y=\frac{1}{1-ac}$$

$$z=\frac{1}{1-ab}$$

E nossa desigualdade pode ser reescrita como:

$$\sqrt{\frac{1}{1-bc}-1}+\sqrt{\frac{1}{1-ac}-1}+\sqrt{\frac{1}{1-ab}-1} \leq \sqrt{\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ac}+\frac{1}{1-ab}}$$

Efetuando, portanto a substituição por tangentes, teremos:

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{1}{1-tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2}}-1} \leq \sqrt{\sum_{cyc}\frac{1}{1-tan\frac{\beta}{2}tan\frac{\gamma}{2}}}$$

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}-sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}}-1} \leq \sqrt{\sum_{cyc}\frac{cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}-sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}}}$$

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}}{sen\frac{\alpha}{2}}} \leq \sqrt{\sum_{cyc}\frac{cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}}{sen\frac{\alpha}{2}}}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $\sqrt{sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}}$, teremos:

$$\sum_{cyc} sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2} \leq \sqrt{\sum_{cyc} sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}}$$

Elevando ambos os lados da desigualdade ao quadrado, teremos que:

$$\sum_{cyc}\left[sen^2\frac{\beta}{2}sen^2\frac{\gamma}{2}+2sen^2\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}\right] \leq \sum_{cyc} sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\sum_{cyc}\left[sen^2\frac{\beta}{2}sen^2\frac{\gamma}{2}-sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}+2sen^2\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}\right] \leq 0$$

$$\sum_{cyc}\left[-sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}+2sen^2\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}\right] \leq 0$$

$$\sum_{cyc}\left[-1+2sen\frac{\alpha}{2}\right] \leq 0$$

$$sen\frac{\alpha}{2}+sen\frac{\beta}{2}+sen\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$$

Que nada mais é do que a primeira desigualdade desse artigo.

45.(Titu Andreescu-"103 Trigonometry Problems from the training of the USA IMO Team"/Problem E 1724. American Mathematical Monthly 72 (1965), 792.Suggested by Alexander Oppenheim)Let x,y,z real positive numbers. Prove that:

$$a^2x + b^2y + c^2z \geq 4[ABC]\sqrt{xy + xz + yz}$$

Solução:
Note que:

$$a^2x + b^2y + c^2z \geq 4[ABC]\sqrt{xy + xz + yz}$$

$$a^2x + b^2y + c^2z \geq \frac{abc}{R}\sqrt{xy + xz + yz}$$

$$\frac{aRx}{bc} + \frac{bRy}{ac} + \frac{cRz}{ab} \geq \sqrt{xy + xz + yz}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4aR^2x}{2Rbc} + \frac{4bR^2y}{2Rac} + \frac{4cR^2z}{2Rab}\right) \geq \sqrt{xy + xz + yz}$$

$$\frac{sen\alpha x}{sen\beta sen\gamma} + \frac{sen\beta y}{sen\alpha sen\gamma} + \frac{sen\gamma z}{sen\alpha sen\beta} \geq 2\sqrt{xy + xz + yz}$$

$$\frac{sen(\pi - \alpha)x}{sen\beta sen\gamma} + \frac{sen(\pi - \beta)y}{sen\alpha sen\gamma} + \frac{sen(\pi - \gamma)z}{sen\alpha sen\beta} \geq 2\sqrt{xy + xz + yz}$$

$$\frac{sen(\alpha + \beta + \gamma - \alpha)x}{sen\beta sen\gamma} + \frac{sen(\alpha + \beta + \gamma - \beta)y}{sen\alpha sen\gamma} + \frac{sen(\alpha + \beta + \gamma - \gamma)z}{sen\alpha sen\beta} \geq 2\sqrt{xy + xz + yz}$$

$$\frac{sen(\beta + \gamma)x}{sen\beta sen\gamma} + \frac{sen(\alpha + \gamma)y}{sen\alpha sen\gamma} + \frac{sen(\alpha + \beta)z}{sen\alpha sen\beta} \geq 2\sqrt{xy + xz + yz}$$

$$\frac{(sen\beta cos\gamma + sen\gamma cos\beta)x}{sen\beta sen\gamma} + \frac{(sen\alpha cos\gamma + sen\gamma cos\alpha)y}{sen\alpha sen\gamma} + \frac{(sen\alpha cos\beta + sen\beta cos\alpha)z}{sen\alpha sen\beta} \geq 2\sqrt{xy + xz + yz}$$

$$(cot\beta + cot\gamma)x + (cot\alpha + cot\gamma)y + (cot\alpha + cot\beta)z \geq 2\sqrt{xy + xz + yz} \quad (238)$$

Fazendo $xy + xz + yz = 1$ e fazendo a substituição $x = cot\alpha', y = cot\beta', z = cot\gamma'$, teremos[16] que α', β', γ' serão ângulos de um triângulo, e a nossa desigualdade será equivalente a desigualdade abaixo :

$$(cot\beta + cot\gamma)cot\alpha' + (cot\alpha + cot\gamma)cot\beta' + (cot\alpha + cot\beta)cot\gamma' \geq 2 \quad (239)$$

Suponha sem perda de generalidade (o caso contrário é análogo) que:

[16] Note que como a desigualdade é homogênea, podemos supor que $xy + xz + yz = 1$, isto é, estamos apenas normalizando a desigualdade

$$cot\alpha \geq cot\alpha' \tag{240}$$

$$cot\beta \geq cot\beta' \tag{241}$$

$$cot\gamma' \geq cot\gamma \tag{242}$$

Pois como essas variáveis são ângulos de um triângulo, não podemos ter $cot\alpha \geq cot\alpha', cot\beta \geq cot\beta', cot\gamma \geq cot\gamma'$.De fato, isso não pode ocorrer, pois suponha sem perda de generalidade que $\alpha' \geq \alpha$ e $\beta' \geq \beta$(como a cotangente é decrescente, isto implica que $cot\alpha \geq cot\alpha'$ e também $cot\beta \geq cot\beta'$), somando essas duas primeiras desigualdades temos $\alpha' + \beta' \geq \alpha + \beta \Rightarrow cot(\alpha + \beta) \geq cot(\alpha' + \beta') \Rightarrow -cot(\pi - (\alpha+\beta)) \geq -cot(\pi - (\alpha' + \beta')) \Rightarrow -cot(\alpha+\beta+\gamma-(\alpha+\beta)) \geq -cot(\alpha' + \beta' + \gamma' - (\alpha' + \beta')) \Rightarrow -cot(\gamma) \geq -cot(\gamma') \Rightarrow cot(\gamma') \geq cot(\gamma)$.Agora, defina como funções $f_1(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ e $f_2(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f_1(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = (cot\beta+cot\gamma)(cot\alpha'-cot\alpha)+(cot\alpha+cot\gamma)(cot\beta'-cot\beta)+(cot\alpha+cot\beta)(cot\gamma'-cot\gamma) \tag{243}$$

$$f_2(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = (cot\beta'+cot\gamma')(cot\alpha-cot\alpha')+(cot\alpha'+cot\gamma')(cot\beta-cot\beta')+(cot\alpha'+cot\beta')(cot\gamma-cot\gamma') \tag{244}$$

Observe agora, que pelas desigualdades (240), (241) e (242) segue que:

$$0 \geq cot\alpha' - cot\alpha \tag{245}$$

$$0 \geq cot\beta' - cot\beta \tag{246}$$

$$cot\gamma' - cot\gamma \geq 0 \tag{247}$$

Sabemos que α', β', γ' são ângulos de um triângulo, então existe a', b', c' tal que $a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c'cos\alpha', b'^2 = a'^2 + c'^2 - 2a'c'cos\beta', c'^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'cos\gamma'$.Seja R' o raio da circunferência inscrita ao triângulo de lados a',b' e c'.Defina $k := \left(\frac{a'}{b'c'} + \frac{b'}{a'c'} + \frac{c'}{a'b'}\right)$, então:

$$\frac{a'}{b'c'} + \frac{b'}{a'c'} + \frac{c'}{a'b'} = k(\alpha', \beta', \gamma') \tag{248}$$

Sendo $k(\alpha', \beta', \gamma')$ uma função de a,b e c.E como nossa desigualdade original é homogênea nas variáveis a,b,c, suponha sem perda de generalidade que a igualdade abaixo ocorra[17]:

[17]Novamente aqui, estamos normalizando a desigualdade.

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}=k(\alpha',\beta',\gamma') \quad (249)$$

Como x,y,z não dependem do circunraio R', suponha sem perda de generalidade que $R'\geq R$.Tome agora a desigualdade (240) e considere o desenvolvimento(aplicando a lei dos cossenos e lei dos senos):
$cot\alpha \geq cot\alpha' \Rightarrow \frac{(b^2+c^2-a^2)R}{abc} \geq \frac{(b'^2+c'^2-a'^2)R'}{a'b'c'} \Rightarrow \left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}-2\frac{a}{bc}\right)R \geq \left(\frac{a'}{b'c'}+\frac{b'}{a'c'}+\frac{c'}{a'b'}-2\frac{a'}{b'c'}\right)R' \Rightarrow Rk(\alpha',\beta',\gamma')-2\frac{aR}{bc} \geq Rk(\alpha',\beta',\gamma')-2\frac{a'R'}{b'c'} \Rightarrow \frac{a'R'}{b'c'} \geq \frac{aR}{bc} \Rightarrow$

$$\frac{a'R'}{b'c'} \geq \frac{aR}{bc} \quad (250)$$

Aplicando o mesmo raciocínio para a desigualdade (242), concluímos:

$$\frac{b'R'}{a'c'} \geq \frac{bR}{ac} \quad (251)$$

Suponha agora, por absurdo que:

$$cot\alpha + cot\gamma > cot\alpha' + cot\gamma' \quad (252)$$

Ora, veja que:

$cot\alpha + cot\gamma > cot\alpha' + cot\beta' \Rightarrow \frac{(b^2+c^2-a^2)R}{abc}+\frac{(a^2+b^2-c^2)R}{abc} > \frac{(b'^2+c'^2-a'^2)R'}{a'b'c'}+\frac{(a'^2+b'^2-c'^2)R'}{a'b'c'} \Rightarrow \frac{bR}{ac} > \frac{b'R'}{a'c'}$

O que é um absurdo.Por outro lado, suponha por absurdo que:

$$cot\beta + cot\gamma > cot\beta' + cot\gamma' \quad (253)$$

Ora, veja que:

$cot\beta + cot\gamma > cot\beta' + cot\beta' \Rightarrow \frac{(a^2+c^2-b^2)R}{abc}+\frac{(a^2+b^2-c^2)R}{abc} > \frac{(a'^2+c'^2-b'^2)R'}{a'b'c'}+\frac{(a'^2+b'^2-c'^2)R'}{a'b'c'} \Rightarrow \frac{aR}{bc} > \frac{a'R'}{b'c'}$

O que é um absurdo.Disso conluímos as desigualdades:

$$cot\alpha + cot\gamma \leq cot\alpha' + cot\gamma' \quad (254)$$

$$cot\beta + cot\gamma \leq cot\beta' + cot\gamma' \quad (255)$$

Multiplicando (254) por $cot\beta' - cot\beta$ e (255) por $cot\alpha' - cot\alpha$, note que essas desigualdades vão inverter, pois estamos multiplicando por quantidades não positivas, teremos respectivamente:

$$(cot\alpha + cot\gamma)(cot\beta' - cot\beta) \geq (cot\alpha' + cot\gamma')(cot\beta' - cot\beta) \tag{256}$$

$$(cot\beta + cot\gamma)(cot\alpha' - cot\alpha) \geq (cot\beta' + cot\gamma')(cot\alpha' - cot\alpha) \tag{257}$$

Por outro lado das desigualdades (240) e (241) sabemos que:

$$cot\alpha + cot\beta \geq cot\alpha' + cot\beta' \tag{258}$$

Multiplicando a desigualdade acima por $cot\gamma' - cot\gamma$, que pela desigualdade (248) sabemos ser maior ou igual a zero, teremos:

$$(cot\alpha + cot\beta)(cot\gamma' - cot\gamma) \geq (cot\alpha' + cot\beta')(cot\gamma' - cot\gamma) \tag{259}$$

Somando (256), (257) e (259), teremos:

$$f_1(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') \geq (cot\alpha' + cot\gamma')(cot\beta' - cot\beta) + (cot\beta' + cot\gamma')(cot\alpha' - cot\alpha) + (cot\alpha' + cot\beta')(cot\gamma' - cot\gamma) \tag{260}$$

Somando o lado esquerdo de (244) com o lado esquerdo de (260) e o lado direito de (244) com o lado direito de (260), os termos vão se cancelar e teremos:

$$f_1(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') + f_2(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') \geq 0 \tag{261}$$

E isto implica, finalmente que:

$$(cot\beta + cot\gamma)cot\alpha' + (cot\alpha + cot\gamma)cot\beta' + (cot\alpha + cot\beta)cot\gamma' \geq 2 \tag{262}$$

Que nada mais é do que a desigualdade (239), que é equivalente a desigualdade do enunciado.

46.(Problema sugerido por Israel Meireles Chrisostomo)Seja $j, n \in \mathbb{N}$ tais que $1 < j < n$, e tal que n é número ímpar, encontre valores para x_n que satisfaçam as desigualdades abaixo(explicitando o caso onde ocorre a igualdade):

$$1 + ... + \lfloor \frac{n-1}{j} \rfloor \leq x_n \left(1 + ... + n\right)$$

$$1 + ... + \lfloor \frac{n}{j} \rfloor \leq x_n \left(1 + ... + n\right)$$

Obs: Note que x_n depende de n.

Solução:

Seja j e n números naturais, tal que j é estritamente maior do que 1 e estritamente menor do que n.Qual é a quantidade máxima de múltiplos inteiros de j que existem no intervalo fechado [j,n]?A resposta para essa pergunta é que se n-j é ímpar, então existem no máximo (n-j+1)/2 inteiros, por outro lado, se n-j é par existem no máximo (n-j+2)/2.Como o total de múltiplos inteiros de j no intervalo $[1, n]$ é $\lfloor \frac{n}{j} \rfloor$, fica demonstrado assim o resultado.

Vamos provar que o máximo é realmente esse por etapas:

(1)Seja b um número irracional, então b^k e b^{k+1} não podem ser ambos racionais. Prova:Suponha que b^k e b^{k+1} sejam ambos racionais, então existem p, q, p', q' inteiros tais que $b^k = p/q$ e $b^{k+1} = p'/q'$, multiplicando as duas igualdades teremos $b = pq'/qp'$, o que é um absurdo, pois isto implicaria que b é racional.

(2)Seja a expressão $a^{1/j}$, com $j > 1$, então existe $a \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{N}$, tais que $a^{\frac{1}{j}} \notin \mathbb{Q}$. Prova:Tome a como sendo um número primo qualquer, como a não tem fatores primos, então não pode ser potência k-ésima perfeita.

(3)Seja j um número, a quantidade máxima de múltiplos inteiros de j que existem no intervalo fechado $[1, n]$ é $(n-j+1)/2$, se $n-j$ é ímpar, e $(n-j+2)/2$ se $n-j$é par. Prova: Seja b um número, tal que $b = a^{\frac{1}{j}}$ e tal que (2) seja satisfeito, então, seja o conjunto $X = \left\{b^j, b^{j+1}, ..., b^n\right\}$ por (1), sabemos que não existem duas potências consecutivas nesse conjunto que sejam racionais.Daí concluímos que o número máximo de potências racionais de b no conjunto ocorre intercaladamente, isto é, quando uma potência é irracional a próxima tem que ser racional.Sabemos que a primeira potência é racional, então a segunda tem que ser necessariamente irracional, a próxima racional e assim por diante.Veja:

$$racional, irracional, racional, irracional, racional, ...$$

Se a quantidade de elementos acima for par, então sabemos que a última potência é irracional, se for ímpar sabemos que a última potência é racional.Ora, mas se a quantidade de elementos acima for par, então a quantidade de potências racionais é quantidade de elementos dividida por 2, se for ímpar é a quantidade de elementos somado a 1 dividida por 2.Mas observe que a quantidade de potências racionais é justamente a mesma quantidade de múltiplos de j, pois a é inteiro, então a elevado a outro inteiro é racional....Mas no conjunto $X = \left\{b^j, b^{j+1}, ..., b^n\right\}$ temos b^j até b^n, de j até n temos $n-j+1$ elementos, então o conjunto X, tem $n-j+1$ elementos, como a quantidade de inteiros é máxima quando a quantidade de elementos do conjunto está dividida por dois(quando $n-j$é ímpar), e quando a quantidade de elementos do conjunto somado a 1 e divido por dois(quando $n-j$ é par), teremos o seguinte resultado provado:

$$\lfloor \frac{n}{j} \rfloor \leq \frac{n+1-j}{2} \qquad \text{(Se } n-j \text{ é ímpar)}$$

$$\lfloor \frac{n}{j} \rfloor \leq \frac{n+2-j}{2} \qquad \text{(Se } n-j \text{ é par)}$$

Suponha $n-j$ ímpar então, fazendo $m = n-j$:

$$\lfloor \frac{m+j}{j} \rfloor \leq \frac{m+1}{2}$$

$$\lfloor \frac{m}{j} \rfloor + 1 \leq \frac{m+1}{2}$$

$$\lfloor \frac{m}{j} \rfloor \left(\lfloor \frac{m}{j} \rfloor + 1 \right) \leq \lfloor \frac{m}{j} \rfloor \frac{m+1}{2}$$

$$1 + ... + \lfloor \frac{m}{j} \rfloor \leq \lfloor \frac{m}{j} \rfloor \frac{m+1}{4}$$

$$m \left(1 + ... + \lfloor \frac{m}{j} \rfloor \right) \leq \lfloor \frac{m}{j} \rfloor \frac{m(m+1)}{4}$$

$$1 + ... + \lfloor \frac{m}{j} \rfloor \leq \frac{1}{2m} \lfloor \frac{m}{j} \rfloor (1 + ... + m)$$

Suponha $n-j$ par então, fazendo $m = n-j+1$:

$$\lfloor \frac{m+j-1}{j} \rfloor \leq \frac{m+1}{2}$$

$$\lfloor \frac{m-1}{j} \rfloor + 1 \leq \frac{m+1}{2}$$

$$\lfloor \frac{m-1}{j} \rfloor \left(\lfloor \frac{m-1}{j} \rfloor + 1 \right) \leq \lfloor \frac{m-1}{j} \rfloor \frac{m+1}{2}$$

$$1 + ... + \lfloor \frac{m-1}{j} \rfloor \leq \lfloor \frac{m-1}{j} \rfloor \frac{m+1}{4}$$

$$m \left(1 + ... + \lfloor \frac{m-1}{j} \rfloor \right) \leq \lfloor \frac{m-1}{j} \rfloor \frac{m(m+1)}{4}$$

$$2m\left(1+...+\lfloor\frac{m-1}{j}\rfloor\right)\leq\lfloor\frac{m-1}{j}\rfloor(1+...+m)$$

$$1+...+\lfloor\frac{m-1}{j}\rfloor\leq\frac{1}{2m}\lfloor\frac{m-1}{j}\rfloor(1+...+m)$$

A igualdade ocorre quando $j=2$.

47.(Problema sugerido por Israel Meireles Chrisostomo)Seja $\mathbb{T}$ o conjunto dos números transcendentes e $\overline{\mathbb{Q}}$ o conjunto dos números algébricos.Uma sequência $(a)_n$ é dita sequência de Weierstrass, se $a_k \in \overline{\mathbb{Q}}, \forall k \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = L, L \in \mathbb{T}$.Por exemplo, a sequência $a_n = (1 + x/n)^{yn}, x, y \in \mathbb{Q}$ é de Weierstrass, pois seu limite é transencendente e os termos dessa sequência são compostos apenas por números algébricos.Uma sequência $(a)_n$ de Weierstrass, é dita Sequência de n-Weierstrass se existe um polinômio $P_n(x)$ de grau n com coeficientes inteiros, tal que $P_n(a_n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, e ainda, todos os termos dessa sequência são distintos.Encontre o termo geral de uma Sequência de n-Weierstrass.

Solução Sejam k_i números naturais, e c_i números racionais, $\forall i \in \mathbb{N}$.Então
$\sqrt[k_n]{c_n + \sqrt[k_{n-1}]{c_{n-1} + ... \sqrt[k_3]{c_3 + \sqrt[k_2]{c_2 + \sqrt[k_1]{c_1}}}}}$ é algébrico.

Prova: Basta observar que esse número é raíz do polinômio
$P_n(x) = ((((x^{k_n} - c_n)^{k_{n-1}} - c_{n-1})^{k_{n-2}} - ...)^{k_3} - c_2)^{k_1} - c_1$

De fato, por indução , o caso base é óbvio.Considere como hipótese de indução

$r_n = \sqrt[k_n]{c_n + \sqrt[k_{n-1}]{c_{n-1} + ... \sqrt[k_3]{c_3 + \sqrt[k_2]{c_2 + \sqrt[k_1]{c_1}}}}}$ é raiz de
$P_n(x) = ((((x^{k_n} - c_n)^{k_{n-1}} - c_{n-1})^{k_{n-2}} - ...)^{k_3} - c_2)^{k_1} - c_1$
Como tese de indução considere que

$r_{n+1} = \sqrt[k_{n+1}]{c_{n+1} + \sqrt[k_n]{c_n + \sqrt[k_{n-1}]{c_{n-1} + ... \sqrt[k_3]{c_3 + \sqrt[k_2]{c_2 + \sqrt[k_1]{c_1}}}}}}$ é raiz de
$P_{n+1}(x) = ((((\, (x^{k_{n+1}} - c_{n+1})^{k_n} - c_n)^{k_{n-1}} - c_{n-1})^{k_{n-2}} - ...)^{k_3} - c_2)^{k_1} - c_1$
Substituindo r_{n+1} em $P_{n+1}(x)$ teremos
$P_{n+1}(r_{n+1}) = ((((r_n^{k_n} - c_n)^{k_{n-1}} - c_{n-1})^{k_{n-2}} - ...)^{k_3} - c_2)^{k_1} - c_1 = P_n(r_n)$ pela hipótese de indução segue que $P_{n+1}(r_{n+1}) = 0$.

Encontremos agora uma sequência de algébricos.Primeiramente, provemos por indução que vale a fórmula:

$$sen\phi = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2^3} + \sqrt{\frac{1}{2^7} + \sqrt{\frac{1}{2^{15}} + \sqrt{... + \sqrt{\frac{1}{2^{2^{n-1}-1}} + \sqrt{\frac{1 + \cos(2^n\phi)}{2^{2^n-1}}}}}}}}} \tag{263}$$

Como base de indução, considere válido:

$senx = \sqrt{\frac{1-cos2x}{2}}$

$senx = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1+cos2^2x}{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1+cos2^2x}{2^2\times 2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2^2\times 2} + \sqrt{\frac{1+\cos 2^3x}{2^{2(2+1)}\times 2}}}}$

Como hipótese de indução, suponha que (263) seja válido para um n, então, usando (263), teremos:

$$sen\phi = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2^3} + \sqrt{\frac{1}{2^7} + \sqrt{\frac{1}{2^{15}} + \sqrt{... + \sqrt{\frac{1}{2^{2^{n-1}-1}} + \sqrt{\frac{1+\cos(2^n\phi)}{2^{2^n-1}}}}}}}}} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2^3} + \sqrt{\frac{1}{2^7} + \sqrt{\frac{1}{2^{15}} + \sqrt{... + \sqrt{\frac{1}{2^{2^{n-1}-1}} + \sqrt{\frac{1}{2^{2^n-1}} + \frac{1}{2^{2^n-1}}\sqrt{\frac{1+cos(2^{n+1}\phi)}{2}}}}}}}}} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2^3} + \sqrt{\frac{1}{2^7} + \sqrt{\frac{1}{2^{15}} + \sqrt{... + \sqrt{\frac{1}{2^{2^{n-1}-1}} + \sqrt{\frac{1}{2^{2^n-1}} + \sqrt{\frac{1+cos(2^{n+1}\phi)}{2^{2(2^n-1)+1}}}}}}}}}} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2^3} + \sqrt{\frac{1}{2^7} + \sqrt{\frac{1}{2^{15}} + \sqrt{... + \sqrt{\frac{1}{2^{2^{n-1}-1}} + \sqrt{\frac{1}{2^{2^n-1}} + \sqrt{\frac{1+cos(2^{n+1}\phi)}{2^{2^{n+1}-1}}}}}}}}}}$$

Finalizando assim a prova por indução.Fazendo $\phi = \dfrac{\pi}{3\times 2^n}$ em (263), teremos:

$$sen\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2^3} + \sqrt{\frac{1}{2^7} + \sqrt{\frac{1}{2^{15}} + \sqrt{... + \sqrt{\frac{1}{2^{2^{n-1}-1}} + \sqrt{\frac{1}{2^{2^n-1}} + \frac{1}{2^{2^n}}}}}}}}}$$

$$(3\times 2^n)sen\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = (3\times 2^n)\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2^3} + \sqrt{\frac{1}{2^7} + \sqrt{\frac{1}{2^{15}} + \sqrt{... + \sqrt{\frac{1}{2^{2^{n-1}-1}} + \sqrt{\frac{1}{2^{2^n-1}} + \frac{1}{2^{2^n}}}}}}}}} \quad (264)$$

Observe que (264) é algébrico, pois já provamos isso nas primeiras linhas dessa questão (de fato os algébricos formam um corpo, o produto de dois algébricos é ainda algébrico).Resta mostrar que todos os termos da sequência são distintos, para isto, observe que nossa sequência é uma expressão do tipo $f(x) = \dfrac{\pi senx}{x}$, por outro lado, note que $f'(x) = \pi \left(\dfrac{senx - xcosx}{x^2} \right)$ e ainda $tanx > x \Rightarrow senx - xcosx > 0$, mostrando assim que a função é crescente, e portanto, bijetora, não podendo admitir que termos da sequência sejam iguais.

48. Calcule a integral $\int \ln(x)dx$.

Solução 1:

Pela fórmula de integração por partes, sabemos que

$$\int v(x)du = u(x)v(x) - \int u(x)dv$$

Faça a substituição $\ln(x) = v(x) \Rightarrow dv = \frac{1}{x}dx$, e ainda $du = dx \Rightarrow u(x) = x$, subsituindo na fórmula de integração por partes, teremos:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x$$

Solução 2:

Faça a substituição $\ln(x) = -w \Rightarrow dw = -\frac{1}{x}dx \Rightarrow dx = -xdw \Rightarrow dx = -e^{-w}dw$. Substituindo na integral, teremos:

$$\int \ln(x)dx = \int we^{-w}dw$$

Pela fórmula de integração por partes, sabemos que

$$\int v(w)du = u(w)v(w) - \int u(w)dv$$

Fazendo $u(w) = -e^{-w} \Rightarrow du = e^{-w}dw,\ dv = dw \Rightarrow v(w) = w$, teremos:

$$\int \underbrace{w}_{v(w)}\underbrace{e^{-w}dw}_{du} = \underbrace{-e^{-w}}_{u(w)}\underbrace{w}_{v(w)} - \int (\underbrace{-e^{-w}}_{u(w)})\underbrace{dw}_{dv}$$

$$\int we^{-w}dw = -e^{-w}w + \int e^{-w}dw = -e^{-w}w - e^{-w}$$

Desfazendo a substituição, e observando que $\ln(x) = -w \Rightarrow e^{\ln(x)} = e^{-w} \Rightarrow x = e^{-w}$ teremos:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$$

49. Calcule a integral

$$\int \sqrt{k+x^2}dx$$

Solução:
Faça $x = \sqrt{k}tan\alpha \Rightarrow dx = \sqrt{k}sec^2\alpha d\alpha$, a integral fica reescrita como:

$$\int \sqrt{k+x^2}dx = \int ksec^3\alpha d\alpha \qquad (1)$$

Calculemos a integral acima.Pela formula da integral por partes sabemos que:
$\displaystyle\int u(\alpha)v'(\alpha)d\alpha = u(\alpha)v(\alpha) - \int u'(\alpha)v(\alpha)d\alpha \qquad (2)$

Fazendo $u(\alpha) = sec\alpha \Rightarrow u'(\alpha) = sec\alpha tan\alpha$ e também $v'(\alpha) = sec^2\alpha \Rightarrow v(\alpha) = tan\alpha$, substituindo em (1), teremos:

$$\int sec^3\alpha d\alpha = sec\alpha tan\alpha - \int sec\alpha tan^2\alpha d\alpha$$

$$\int sec^3\alpha d\alpha = sec\alpha tan\alpha - \int sec\alpha(sec^2\alpha - 1)d\alpha$$

$$\int sec^3\alpha d\alpha = \frac{1}{2}sec\alpha tan\alpha + \frac{1}{2}\int sec\alpha d\alpha$$

Multiplicando e dividindo a integral ao lado direito por $tan\alpha + sec\alpha$, teremos:

$$\int sec^3\alpha d\alpha = \frac{1}{2}sec\alpha tan\alpha + \frac{1}{2}\int \frac{sec\alpha(tan\alpha + sec\alpha)}{tan\alpha + sec\alpha}d\alpha \quad (3)$$

Observe que $(tan\alpha + sec\alpha)' = sec\alpha(tan\alpha + sec\alpha)$, fazendo $f(\alpha) = tan\alpha + sec\alpha$, teremos que

$$\int \frac{sec\alpha(tan\alpha + sec\alpha)}{tan\alpha + sec\alpha}d\alpha = \int \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}d\alpha = ln|f(x)| = ln\,|tan\alpha + sec\alpha|$$

Substituindo em (3), teremos:

$$\int sec^3\alpha d\alpha = \frac{1}{2}sec\alpha tan\alpha + \frac{1}{2}ln\,|tan\alpha + sec\alpha| \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (1):

$$\int \sqrt{k+x^2}dx = \frac{k}{2}sec\alpha tan\alpha + \frac{k}{2}ln\,|tan\alpha + sec\alpha| \qquad (5)$$

Mas $x = \sqrt{k}tan\alpha \Rightarrow x^2 = ktan^2\alpha \Rightarrow x^2 = k(sec^2\alpha - 1) \Rightarrow sec\alpha = \sqrt{\dfrac{x^2+k}{k}}$, substituindo esse resultado em (5), teremos:

$$\int \sqrt{k+x^2}dx = \frac{x\sqrt{x^2+k}}{2} + \frac{k}{2}ln\left|\frac{x}{\sqrt{k}} + \sqrt{\frac{x^2+k}{k}}\right| + C \qquad (5)$$

50. Calcule a integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}dx$$

Solução: Fazendo $x = \sqrt{k}sen(\alpha), teremos \ \frac{dx}{d\alpha} = \sqrt{k}cos(\alpha) \Rightarrow dx = \sqrt{k}cos(\alpha)d\alpha$,substituindo na integral teremos:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}dx = \int \frac{ksen^2(\alpha)\sqrt{k}cos(\alpha)}{\sqrt{k-ksen^2(\alpha)}}d\alpha = \int ksen^2(\alpha)d\alpha$$

Calculemos a integral acima.Pela formula da integral por partes sabemos que:

$$\int u(\alpha)v'(\alpha)d\alpha = u(\alpha)v(\alpha) - \int u'(\alpha)v(\alpha)d\alpha \quad (1)$$

Fazendo $u(\alpha) = sen\alpha \Rightarrow u'(\alpha) = cos(\alpha)d\alpha$. Fazendo $v'(\alpha) = sen\alpha \Rightarrow v(\alpha) = -cos\alpha$

Substituindo em (1) e multiplicando tudo por k: $\int ksen^2(\alpha)d\alpha = -ksen\alpha cos\alpha + \int kcos^2\alpha d\alpha \Rightarrow$

$$\int ksen^2(\alpha)d\alpha = -ksen\alpha cos\alpha + \int k(1-sen^2\alpha)d\alpha \Rightarrow$$

$$\int ksen^2(\alpha)d\alpha = \frac{k}{2}(\alpha - sen\alpha cos\alpha) + C \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}dx = \frac{k}{2}(\alpha - sen\alpha cos\alpha) + C \quad (2)$$

Mas $x = \sqrt{k}sen(\alpha) \Rightarrow x = \sqrt{k}\frac{1}{\sqrt{1+cot^2(\alpha)}} \Rightarrow cot^2\alpha + 1 = \frac{k}{x^2} \Rightarrow$

$cot^2\alpha = \frac{k}{x^2} - 1 \Rightarrow tan^2\alpha = \frac{1}{\frac{k}{x^2}-1} \Rightarrow tan\alpha = \frac{x}{\sqrt{k-x^2}} \Rightarrow \alpha = \arctan\frac{x}{\sqrt{k-x^2}}$

Alem disso sabemos que $x = \sqrt{k}sen(\alpha) \Rightarrow x^2 = ksen^2(\alpha) = k(1-cos^2\alpha) \Rightarrow cos\alpha = \sqrt{\frac{k-x^2}{k}}$

Substituindo em (2), teremos:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}dx = \frac{k}{2}\left(\arctan\frac{x}{\sqrt{k-x^2}} - \frac{x\sqrt{k-x^2}}{k}\right) + C$$

51.O Teorema Fundamental do Cálculo, diz que se f é uma função contínua de valores reais, definida em um intervalo fechado [a, b], e se F for a função definida para x em [a, b] por:

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

Então

$$F'(x) = f(x)$$

Além disso, se f uma função contínua de valores reais, definida em um intervalo fechado [a, b], e se F é uma função tal que

$$F'(x) = f(x)$$

então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Prove o Teorema Fundamental do Cálculo.

Solução:

Se m e M são os máximos e mínimos de $f(x)$, então:

$$m \leq f(x) \leq M \quad (1)$$

Do lado esquerdo de (1), segue:

$$0 \leq f(x) - m \Rightarrow 0 \leq \int_a^b (f(x) - m)dx \Rightarrow \int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

A segunda desigualdade acima segue do fato que a primitiva de $H_1(x) = f(x) - m$ é não decrescente pois $f(x) - m \geq 0$ e $b \geq a$. Por outro lado, do lado direito de (1), segue:

$$f(x) - M \leq 0 \Rightarrow \int_a^b (f(x) - M)dx \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx \quad (3)$$

A segunda desigualdade acima segue do fato que a primitiva de $H_2(x) = f(x) - M$ é não crescente pois $f(x) - M \leq 0$ e $b \geq a$.De (2) e de (3), vem:

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx \quad (4)$$

Observe que $\int_a^b mdx = (b-a)m$ e $\int_a^b Mdx = (b-a)M$, subsituindo em (4), temos:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por $b - a$, teremos:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M \quad (5)$$

Como $f(x)$ é contínua,$f(x)$ passa por todos os pontos entre m e M e portanto existe c tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad (6)$$

Fazendo $b = x + h$ e $a = x$ em (6),e usando que toda função f definida em um intervalo fechado tem máximo e mínimo, teremos:

$$f(c_h) = \frac{1}{x+h-x}\int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \quad (6)$$

Onde $x \leq c_h \leq x + h$Por outro lado, observe que:

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = g(x+h) - g(x)$$

Substituindo o resultado acima em (6), obtemos:

$$f(c_h) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad (7)$$

Temos duas possibilidades [18], dependendo se f é não decrescente ou não crescente, pois como $x \leq c_h \leq x + h$, ou ocorre:

$$f(x) \leq f(c_h) \leq f(x+h) \qquad \text{(f é não decrescente (A))}$$

Ou ocorre:

$$f(x+h) \leq f(c_h) \leq f(x) \qquad \text{(f é não crescente (B))}$$

Se A é verdade, então tomando o limite de h tendendo a zero, e usando que f é contínua, teremos:

$$\lim_{h\to 0} f(x) \leq \lim_{h\to 0} f(c_h) \leq \lim_{h\to 0} f(x+h) \Rightarrow f(x) \leq \lim_{h\to 0} f(c_h) \leq f(x)$$

Pelo teorema do confronto o resultado segue.Por outro lado, se B é verdade, então tomando o limite e usando que f é contínua:

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) \leq \lim_{h\to 0} f(c_h) \leq \lim_{h\to 0} f(x) \Rightarrow f(x) \leq \lim_{h\to 0} f(c_h) \leq f(x)$$

Pelo teorema do confronto o resultado segue.

[18]Os outros casos podem ser cobertos também pela continuidade...

Se $h < 0$, então faça $a = x + h$ e $b = x$ em 6, no intervalo fechado $[x + h, x]$ f admite máximo e mínimo, segue que:

$$f(c_h) = \frac{1}{x-(x+h)} \int_{x+h}^{x} f(t)dt = -\frac{1}{h} \int_{x+h}^{x} f(t)dt \Rightarrow f(c_h) = -\frac{1}{h} \int_{x+h}^{x} f(t)dt \quad (7)$$

Por comodidade seja $h = -h', h' > 0$, então:

$$f(c_h) = -\frac{1}{h} \int_{x-h'}^{x} f(t)dt$$

Fazendo $x' = x - h'$ e substituindo nos limites de integração:

$$f(c_h) = -\frac{1}{h} \int_{x'}^{x'+h'} f(t)dt$$

Observe que:

$$\int_{x'}^{x'+h'} f(t)dt = \int_{a}^{x'+h'} f(t)dt - \int_{a}^{x'} f(t)dt = \int_{a}^{x} f(t)dt - \int_{a}^{x+h} f(t)dt$$

Substituindo esse resultado em (7), teremos:

$$f(c_h) = -\frac{1}{h}\left(\int_{a}^{x} f(t)dt - \int_{a}^{x+h} f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\left(\int_{a}^{x+h} f(t)dt - \int_{a}^{x} f(t)dt\right) = \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Tomando o limite de h tendendo a zero, teremos:

$$\lim_{n\to 0} f(c_h) = \lim_{n\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Temos duas possibilidades, dependendo se f é não decrescente ou não crescente, pois como $x + h \leq c_h \leq x$, ou ocorre:

$$f(x) \leq f(c_h) \leq f(x+h) \qquad (A')$$

Ou ocorre:

$$f(x+h) \leq f(c_h) \leq f(x) \qquad (B')$$

Nos dois casos, como a função é contínua, o resultado segue pelo teorema do confronto. Concluindo assim, que:

$$g'(x) = f(x)$$

Sabemos que $F'(x) = f(x)$ e $g'(x) = f(x)$, pelo teorema do valor médio a diferença entre as funções é uma constante, então, existe uma constante C, tal que:

$$F(x) = g(x) + C$$

Fazendo $x = b$ e $x = a$, teremos:

$$F(b) = g(b) + C$$

$$F(a) = g(a) + C = \int_a^a f(t)dt + C = 0 + C = C \Rightarrow F(a) = C$$

Pegando a diferença entre as igualdades acima, teremos:

$$F(b) - F(a) = g(b) = \int_a^b f(t)dt$$

52. Calcule a integral $\int sen^2\theta d\theta$.

Solução: Observe que $cos(2\theta) = 1 - 2sen^2\theta \Rightarrow sen^2(\theta) = \frac{1 - cos(2\theta)}{2}$, substituindo na integral, teremos:

$\int sen^2\theta d\theta = \int \frac{1 - cos(2\theta)}{2} d\theta = \int \frac{1}{2} d\theta - \int \frac{cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{\theta}{2} - \int \frac{cos(2\theta)}{2} d\theta \Rightarrow$
$\int sen^2\theta d\theta = \frac{\theta}{2} - \int \frac{cos(2\theta)}{2} d\theta$

Fazendo $2\theta = u \Rightarrow du = 2d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{du}{2}$, substituindo na integral:
$\int sen^2\theta d\theta = \frac{\theta}{2} - \int \frac{cos(u)}{4} du = \frac{\theta}{2} - \frac{sen(u)}{4} = \frac{\theta}{2} - \frac{sen(2\theta)}{4}$

53. Calcule a integral $\int sen^3\theta d\theta$.

Solução: Observe $\int sen^3\theta d\theta = \int sen\theta sen^2\theta d\theta = \int sen\theta(1 - cos^2\theta)d\theta = \int sen\theta d\theta - \int sen\theta cos^2\theta d\theta = -cos\theta - \int sen\theta cos^2\theta d\theta$

Fazendo $cos^2\theta = u \Rightarrow du = -2sen\theta cos\theta d\theta \Rightarrow \dfrac{du}{2} = -sen\theta cos\theta d\theta$, substituindo na integral:

$\int sen^3\theta d\theta = cos\theta + \int \dfrac{\sqrt{u}}{2}du = -cos\theta + \dfrac{2u^{\frac{3}{2}}}{3 \times 2} + C = -cos\theta + \dfrac{(cos^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}{3} + C = -cos(\theta) + \dfrac{cos^3(\theta)}{3} + C$

54. Calcule a integral $\int \theta \arctan^2(\theta) d\theta$.

Solução:

Faça $y = \arctan(\theta) \Rightarrow dy = \dfrac{1}{1+\theta^2} d\theta \Rightarrow dy = \dfrac{1}{1+tan^2(y)} d\theta \Rightarrow d\theta = sec^2(y)dy$, substituindo na integral teremos:

$$\int \theta \arctan^2(\theta) d\theta = \int y^2 tan(y) sec^2(y) dy$$

Fazendo $u = y^2 sec(y) \Rightarrow du = (2ysec(y) + y^2 sec(y) tan(y))dy$ e $dv = tan(y)sec(y)dy \Rightarrow v = sec(y)$

$\int y^2 tan(y) sec^2(y) dy = y^2 sec^2(y) - \int sec(y)(2ysec(y) + y^2 sec(y) tan(y))dy = y^2 sec^2(y) - \int 2ysec^2(y)dy - \int y^2 sec^2(y) tan(y) dy \Rightarrow \int y^2 tan(y) sec^2(y) dy = \frac{1}{2}\left(y^2 sec^2(y) - 2\int ysec^2(y)dy\right) = \frac{1}{2} y^2 sec^2(y) - \int ysec^2(y)dy$

$$\int y^2 tan(y) sec^2(y) dy = \frac{1}{2} y^2 sec^2(y) - \int ysec^2(y) dy \qquad (265)$$

Calculemos a segunda integral acima por integração por partes.Faça $y = u \Rightarrow dy = du$ e $dv = sec^2(y)dy \Rightarrow v = tan(y)$

$\int y^2 tan(y) sec^2(y) dy = \frac{1}{2} y^2 sec^2(y) - \left(ytan(y) - \int tan(y)dy\right) = \frac{1}{2} y^2 sec^2(y) - ytan(y) + \int tan(y)dy = \frac{1}{2} y^2 sec^2(y) - ytan(y) - ln\,|cos(y)| + K$

Observe que $sec^2(y) = tan^2(y) + 1 = tan^2(\arctan(\theta)) + 1 = \theta^2 + 1$, $cos(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+tan^2(y)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+tan^2(\arctan(\theta))}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}$, substituindo teremos:

$\int y^2 tan(y) sec^2(y) dy = \frac{1}{2} y^2 sec^2(y) - ytan(y) - ln\,(cos(y)) + K = \frac{(\theta^2+1)}{2} \arctan^2\theta - \theta \arctan\theta - ln\left|\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\right| + K = \frac{(\theta^2+1)}{2} \arctan^2\theta - \theta\arctan\theta - \left(ln 1 - ln\left|\sqrt{1+\theta^2}\right|\right) + K = \frac{(\theta^2+1)}{2}\arctan^2\theta - \theta\arctan\theta + ln\left|\sqrt{1+\theta^2}\right| + K = \frac{(\theta^2+1)}{2}\arctan^2\theta - \theta\arctan\theta + ln\left|1+\theta^2\right|^{\frac{1}{2}} + K = \frac{(\theta^2+1)}{2}\arctan^2\theta - \theta\arctan\theta + \frac{1}{2} ln\left|1+\theta^2\right| + K$

55.(Mathematics Stack Exchange)They are asking me to prove

$$sen(x) > x - \frac{x^3}{3!}, \text{ for } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

I didn't understand how to approach this kind of problem so here is how I tried:
$sen(x) - x + \dfrac{x^3}{6} > 0$
then I computed the derivative of that function to determine the critical points.
So: $\left(sen(x) - x + \dfrac{x^3}{6}\right)' = \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$
The critical points:

$$\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} = 0$$

It seems that 'x = 0' is a critical point. Since $\left(\cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}\right)' = -sen(x)+x$ and $-sen(0) + 0 = 0$
The function has no local minima and maxima. Since the derivative of the function is positive, the function is strictly increasing so the lowest value is 'f(0)'. Since 'f(0) = 0' and '0 > 0' I proved that $sen(x) + x - \dfrac{x^3}{6} > 0$. I'm not sure if this solution is right. And, in general, how do you tackle this kind of problems?

Solução:
A solução segue diretamente da observação que:

$sen(3\gamma) = sen(2\gamma)cos(\gamma)+sen(\gamma)cos(2\gamma) = 2sen(\gamma)cos^2(\gamma)+sen(\gamma)(1-2sen^2(\gamma)) = 2sen(\gamma)(1 - sen^2\gamma) + sen(\gamma)(1 - 2sen^2(\gamma)) = 3sen(\gamma) - 4sen^3(\gamma) \Rightarrow sen^3(\gamma) = \dfrac{1}{4}(3sen(\gamma) - sen(3\gamma))$

$$sen^3(\gamma) = \frac{1}{4}(3sen(\gamma) - sen(3\gamma)) \tag{266}$$

Fazendo $\gamma = \dfrac{\phi}{3^k}$, a igualdade fica reduzida a:

$$sen^3\left(\frac{\phi}{3^k}\right) = \frac{1}{4}\left(3sen\left(\frac{\phi}{3^k}\right) - sen\left(\frac{\phi}{3^{k-1}}\right)\right) \tag{267}$$

Multiplicando por 3^{k-1}:

$$3^{k-1}sen^3\left(\frac{\phi}{3^k}\right) = \frac{1}{4}\left(3^k sen\left(\frac{\phi}{3^k}\right) - 3^{k-1}sen\left(\frac{\phi}{3^{k-1}}\right)\right) \tag{268}$$

Aplicando somatório nos dois lados da igualdade, teremos:

$$\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} sen^3\left(\frac{\phi}{3^k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(3^k sen\left(\frac{\phi}{3^k}\right) - 3^{k-1} sen\left(\frac{\phi}{3^{k-1}}\right)\right) =$$
$$\frac{1}{4}\left(\left(3sen\left(\frac{\phi}{3}\right) - sen\,(\phi)\right) + \left(3^2 sen\left(\frac{\phi}{3^2}\right) - 3sen\left(\frac{\phi}{3}\right)\right) + ... + \left(3^n sen\left(\frac{\phi}{3^n}\right) - 3^{n-1} sen\left(\frac{\phi}{3^{n-1}}\right)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(3^n sen\left(\frac{\phi}{3^n}\right) - sen(\phi)\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} sen^3\left(\frac{\phi}{3^k}\right) = \frac{1}{4}\left(3^n sen\left(\frac{\phi}{3^n}\right) - sen(\phi)\right)$$

Tomando o limite e fazendo $x = \dfrac{\phi}{3^n}$, teremos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^{k-1} sen^3\left(\frac{\phi}{3^k}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(3^n sen\left(\frac{\phi}{3^n}\right) - sen(\phi)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\phi \times \frac{3^n}{\phi} sen\left(\frac{\phi}{3^n}\right) - sen(\phi)\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\left(\frac{\phi sen\,(x)}{x} - sen(\phi)\right) = \frac{1}{4}\left(\phi - sen(\phi)\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^{k-1} sen^3\left(\frac{\phi}{3^k}\right) = \frac{1}{4}\left(\phi - sen(\phi)\right)$$

Observe por outro lado, pela desigualdade $senx \leq x$, segue

$$sen\left(\frac{\phi}{3^k}\right) \leq \frac{\phi}{3^k} \Rightarrow sen^3\left(\frac{\phi}{3^k}\right) \leq \frac{\phi^3}{3^{3k}} \Rightarrow 3^{k-1} sen^3\left(\frac{\phi}{3^k}\right) \leq \frac{\phi^3}{3^{2k+1}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 3^{k-1} sen^3\left(\frac{\phi}{3^k}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi^3}{3^{2k+1}} = \frac{\phi^3}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}} = \frac{\phi^3}{3\times 8} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 3^{k-1} sen^3\left(\frac{\phi}{3^k}\right) \leq$$
$$\frac{\phi^3}{3\times 8} \Rightarrow \frac{1}{4}\left(\phi - sen(\phi)\right) \leq \frac{\phi^3}{3\times 8} \Rightarrow \phi - \frac{\phi^3}{6} \leq sen(\phi)$$

56.(Rumo ao ITA,Substituições trigonométricas)Sejam a, b, c números positivos tais que $c^2 = a^2 - ab + b^2$.Prove que $(a-c)(b-c) \leq 0$

Solução 1:

Observe que:
$3(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow 3a^2 - 6ab + 3b^2 \geq 0 \Rightarrow 4a^2 - 4ab + 4b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 - ab + b^2 \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow c^2 \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow c \geq \dfrac{a+b}{2} \Rightarrow 2c \geq a+b \Rightarrow c-b \geq a-c$

De onde concluímos:

$$c - b \geq a - c \tag{269}$$

Observe que $3ab > 0 \Rightarrow (a+b)^2 > a^2 - ab + b^2 \Rightarrow (a+b)^2 > c^2 \Rightarrow a+b > c \Rightarrow a+b-c > 0$, e portanto podemos multiplicar ambos os lados de (269) por $a+b-c$ sem alterarmos o sinal da desigualdade:

$$(a+b-c)(c-b) \geq (a+b-c)(a-c) \tag{270}$$

Somando $(b-c)(a+b-c)$ nos dois lados da desigualdade acima, teremos:

$$0 \geq (a+b-c)(a-c) + (b-c)(a+b-c) \tag{271}$$

Defina agora a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(a,b,c) = (a-c)(b-c) \tag{272}$$

Note que:

$$f(a,b,c) = ab - ac - bc + c^2 \tag{273}$$

Além disso, vem:

$c^2 = a^2 - ab + b^2 \Rightarrow ab = a^2 + b^2 - c^2$

De onde segue:

$$ab = a^2 + b^2 - c^2 \tag{274}$$

Substituindo (274) em (273) segue
$f(a,b,c) = a^2 + b^2 - c^2 - ac - bc + c^2 = a^2 + b^2 - ac - bc = a(a-c) + b(b-c)$

$$f(a,b,c) = a(a-c) + b(b-c) \tag{275}$$

Multiplicando (272) por 2 e somando com (275):

$$3f(a,b,c) = (a-c)(a+b-c) + (b-c)(a+b-c) \tag{276}$$

Pela igualdade acima e por (271) segue que:

$$3f(a,b,c) \leq 0 \Leftrightarrow f(a,b,c) \leq 0 \Leftrightarrow (a-c)(b-c) \leq 0$$

Solução 2: Suponha sem perda de generalidade que $a \leq b$, então:

$-b \leq -a \Rightarrow -b^2 \leq -ab \Rightarrow a^2 + b^2 - b^2 \leq -ab + a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 \leq c^2 \Rightarrow a \leq c \Rightarrow a - c \leq 0$

$$a - c \leq 0 \tag{277}$$

Por outro lado:
$-b \leq -a \Rightarrow -ab \leq -a^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - ab \leq -a^2 + a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 \leq b^2 \Rightarrow c \leq b \Rightarrow b - c \geq 0$

$$b - c \geq 0 \tag{278}$$

O produto de (277) com (278) é negativo, portanto:

$$(a - c)(b - c) \leq 0$$

57.(ITA-SP)Sabendo-se que $senx = \dfrac{m-n}{m+n}$,$m > 0, n > 0$, podemos afirmar que $tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$ é igual a:

$a)\dfrac{n}{m}$ $\quad$ $b)\dfrac{\sqrt{m}}{n}$ $\quad$ $c)1 - \dfrac{n}{m}$ $\quad$ $d)\sqrt{\dfrac{n}{m}}$ $\quad$ $e)n.r.a.$

Solução 1:
Observe que:

$$tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1 - tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tan\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{279}$$

$$cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{1 - tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tan\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{280}$$

Somando (279) com (280) teremos:
$2\times\left(\dfrac{1 - tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) + cot\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) sen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} =$
$\dfrac{cos\,(x)}{cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} = \dfrac{cos(x)}{cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} =$
$\dfrac{cos(x)}{\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right) sen\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(sen\left(\frac{\pi}{4}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right) + cos\left(\frac{\pi}{4}\right) sen\left(\frac{x}{2}\right)\right)} =$
$\dfrac{2cos(x)}{\left(cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2sen\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right) + sen^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)} =$
$\dfrac{2cos(x)}{1 + sen(x)} \Rightarrow \dfrac{1 - tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{cos(x)}{1 + sen(x)}$

$$\frac{1 - tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{cos(x)}{1 + sen(x)} \tag{281}$$

Observe que $senx = \dfrac{m-n}{m+n} \Rightarrow sen^2x = \left(\dfrac{m-n}{m+n}\right)^2 \Rightarrow 1 - sen^2x = 1 - \left(\dfrac{m-n}{m+n}\right)^2 \Rightarrow cos^2x = 1 - \left(\dfrac{m-n}{m+n}\right)^2 \Rightarrow cosx = \dfrac{2\sqrt{mn}}{m+n}$, substituindo em (281):

$$\sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{1 - tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tan\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{282}$$

Usando (279):

$$\sqrt{\frac{n}{m}} = tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \tag{283}$$

57.(Problema sugerido por Israel Meireles Chrisostomo)Seja:

$$sen(u)+sen(v)+sen(w)=-sen(u+v+w)$$

Prove que:

$$sen(v+w)+sen(u+v)+sen(u+w)=-sen(v+w)sen(u+v)sen(u+w) \quad (284)$$

Solução:

Observe que se $x+y+z=-xyz$, então teremos:

$$\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{4yz}+\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{4xz}+\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{4xy}=-1 \quad (285)$$

Agora, o que devemos provar é a igualdade acima.Para isto, considere o desenvolvimento:

$$\frac{1+y^2+z^2+y^2z^2}{4yz}+\frac{1+x^2+z^2+x^2z^2}{4xz}+\frac{1+x^2+y^2+x^2y^2}{4xy}$$

Observe que:

$x+y+z=-xyz \Rightarrow \dfrac{1}{xy}=-\dfrac{z}{x+y+z}, \dfrac{1}{yz}=-\dfrac{x}{x+y+z}, \dfrac{1}{xz}=-\dfrac{y}{x+y+z}$

De onde se conclui que:

$$-\frac{(1+y^2+z^2+y^2z^2)x}{4(x+y+z)}-\frac{(1+x^2+z^2+x^2z^2)y}{4(x+y+z)}-\frac{(1+x^2+y^2+x^2y^2)z}{4(x+y+z)} \Rightarrow$$

$$\frac{-x-xy^2-xz^2-xy^2z^2}{4(x+y+z)}+\frac{-y-yx^2-yz^2-yx^2z^2}{4(x+y+z)}+\frac{-z-zx^2-zy^2-zx^2y^2}{4(x+y+z)} \Rightarrow$$

$$\frac{-x-xy^2-xz^2-xyz(yz)}{4(x+y+z)}+\frac{-y-yx^2-yz^2-xyz(xz)}{4(x+y+z)}+\frac{-z-zx^2-zy^2-xyz(xy)}{4(x+y+z)} \Rightarrow$$

$$\frac{-x-xy^2-xz^2+(x+y+z)yz}{4(x+y+z)}+\frac{-y-yx^2-yz^2+(x+y+z)xz}{4(x+y+z)}+\frac{-z-zx^2-zy^2+(x+y+z)xy}{4(x+y+z)} \Rightarrow$$

$$\frac{-(x+y+z)+3xyz}{4(x+y+z)}=\frac{-(x+y+z)-3(x+y+z)}{4(x+y+z)}=-1$$

Em outras palavras, o que provamos é que (286) implica (287):

$$x+y+z=-xyz \quad (286)$$

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}=-\frac{4xyz}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} \quad (287)$$

Fazendo $x = tan(\alpha), y = tan(\beta), z = tan(\gamma)$, nossa relação fica reescrita como: $tan(\alpha) + tan(\beta) + tan(\gamma) = -tan(\alpha)tan(\beta)tan(\gamma)$,por outro lado também teremos:

$sen(\alpha)cos(\alpha)+sen(\beta)cos(\beta)+sen(\gamma)cos(\gamma) = -4sen(\alpha)cos(\alpha)sen(\beta)cos(\beta)sen(\gamma)cos(\gamma)$
Multiplicando os dois lados por 2 e usando o seno do arco duplo, finalmente, teremos:

$sen(2\alpha) + sen(2\beta) + sen(2\gamma) = -sen(2\alpha)sen(2\beta)sen(2\gamma)$

Substituindo as tangentes em (285):

$tan(\alpha) + tan(\beta) + tan(\gamma) = -tan(\alpha)tan(\beta)tan(\gamma) \Rightarrow$
$tan(\alpha) + tan(\beta) + tan(\gamma) + tan(\alpha)tan(\beta)tan(\gamma) = 0 \Rightarrow$
$sec(\alpha)sec(\beta)sec(\gamma)(sen(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma)+sen(\beta)cos(\alpha)cos(\gamma)+sen(\gamma)cos(\alpha)cos(\beta)+$
$sen(\alpha)sen(\beta)sen(\gamma)) = 0 \Rightarrow$
$sec(\alpha)sec(\beta)sec(\gamma)(2sen(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma)+2sen(\beta)cos(\alpha)cos(\gamma)+2sen(\gamma)cos(\alpha)cos(\beta)+$
$2sen(\alpha)sen(\beta)sen(\gamma)) = 0 \Rightarrow$
$sec(\alpha)sec(\beta)sec(\gamma)\{\{[cos(\alpha)sin(\beta)-sin(\alpha)cos(\beta)]cos(\gamma)+[sin(\alpha)sin(\beta)+cos(\alpha)cos(\beta)]sen(\gamma)\}+$
$\{[sin(\alpha)cos(\beta) - cos(\alpha)sin(\beta)]cos(\gamma) + [sin(\alpha)sin(\beta) + cos(\alpha)cos(\beta)]sen(\gamma)\} +$
$\{[sin(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sin(\beta)]cos(\gamma) - [cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)sin(\beta)]sen(\gamma)\} +$
$\{[sin(\alpha)cos(\beta)+cos(\alpha)sin(\beta)]cos(\gamma)+[cos(\alpha)cos(\beta)-sin(\alpha)sin(\beta)]sen(\gamma)\}\} =$
$0 \Rightarrow$
$sec(\alpha)sec(\beta)sec(\gamma)\{[sen(-\alpha+\beta)cos(\gamma)+cos(-\alpha+\beta)sen(\gamma)]+[sen(\alpha-\beta)cos(\gamma)+$
$cos(\alpha-\beta)sen(\gamma)]+[sen(\alpha+\beta)cos(\gamma)-cos(\alpha+\beta)sen(\gamma)]+[sen(\alpha+\beta)cos(\gamma)+$
$cos(\alpha+\beta)sen(\gamma)]\} = 0 \Rightarrow$
$sec(\alpha)sec(\beta)sec(\gamma)\{sen(-\alpha+\beta+\gamma)+sen(\alpha-\beta+\gamma)+sen(\alpha+\beta-\gamma)+sen(\alpha+$
$\beta+\gamma)\} = 0$

A única forma dessa igualdade ser igual a zero é se a igualdade abaixo ocorrer:

$$sen(\alpha+\beta-\gamma)+sen(\alpha-\beta+\gamma)+sen(-\alpha+\beta+\gamma)+sen(\alpha+\beta+\gamma)=0 \quad (288)$$

E isto implica finalmente que:

$$sen(\alpha+\beta-\gamma)+sen(\alpha-\beta+\gamma)+sen(-\alpha+\beta+\gamma)=-sen(\alpha+\beta+\gamma) \quad (289)$$

Em outras palavras o que provamos foi que se a igualdade abaixo é verdadeira:

$$sen(\alpha+\beta-\gamma)+sen(\alpha-\beta+\gamma)+sen(-\alpha+\beta+\gamma)=-sen(\alpha+\beta+\gamma) \quad (290)$$

Então vale:

$$sen(2\alpha) + sen(2\beta) + sen(2\gamma) = -sen(2\alpha)sen(2\beta)sen(2\gamma) \tag{291}$$

Fazendo $\alpha = \dfrac{v+w}{2}, \beta = \dfrac{u+w}{2}, \gamma = \dfrac{u+v}{2}$, teremos que se:

$$sen(u) + sen(v) + sen(w) = -sen(u+v+w) \tag{292}$$

Então vale:

$$sen(v+w)+sen(u+v)+sen(u+w) = -sen(v+w)sen(u+v)sen(u+w) \tag{293}$$

58. Seja $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, defina $\psi^n(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\ln(\Gamma(x))$.Prove que:

$$0 \leq \psi^{(1)}\left(m + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{\pi^2}{4m}$$

Onde m é um inteiro maior do que 0.

Solução:

Seja $\mathbb{X}$ o conjunto dos transcendentes tais que o produto de um elemento de $\mathbb{X}$ com π seja inteiro. Seja $q \in \mathbb{X}$, então existe $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$ tal que $q\pi = p$ e :

$$cos\left(2qn\pi z\right) = cos\left(2pnz\right) =$$
$$\frac{cis^{2pn}\left(z\right) + cis^{2pn}\left(-\left(z\right)\right)}{2} =$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{2pn}\binom{2pn}{k}cos^{2pn-k}\left(z\right)i^k sen^k\left(z\right) - \sum_{k=0}^{2pn}\binom{2pn}{k}cos^{2pn-k}\left(z\right)(-1)^k i^k sen^k\left(z\right)\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{2pn}(1-(-1)^k)\binom{2pn}{k}cos^{2pn-k}\left(z\right)i^k sen^k\left(z\right)\right) =$$
$$\frac{2}{2}\sum_{k=0}^{pn}\binom{2pn}{2k}cos^{2pn-(2k)}\left(z\right)i^{2k}sen^{2k}\left(z\right) =$$
$$\sum_{k=0}^{pn}\binom{2pn}{2k}cos^{2pn-(2k)}\left(z\right)i^{2k}sen^{2k}\left(z\right) =$$
$$\sum_{k=0}^{pn}\binom{2pn}{2k}(-1)^k cos^{2pn-(2k)}\left(z\right)sen^{2k}\left(z\right) \Rightarrow$$
$$cos\left(2qn\pi z\right) = \sum_{k=0}^{pn}\binom{2pn}{2k}(-1)^k cos^{2pn-2k}\left(z\right)sen^{2k}\left(z\right)$$

Multiplicando os dois lados da igualdade pnor $\frac{1}{sen^{2pn}(z)}$, obtemos:

$$\frac{cos\left(2qn\pi z\right)}{sen^{2pn}(z)} = \sum_{k=0}^{pn}\binom{2pn}{2k}(-1)^k cot^{2pn-2k}\left(z\right)$$

Fazendo $cot^2(z) = \zeta$, obtemos um polinômio em ζ de grau pn.Sabe-se que as raízes desse polinômio saem do cosseno ao lado esquerdo, veja:

$$cos\left(2qn\pi z\right) = 0 \Rightarrow 2qn\pi z = \frac{(2k-1)\pi}{2} \Rightarrow z = \frac{2k-1}{4qn}$$

portanto, suas raízes são:

$$\zeta_k = cot^2\left(\frac{2k-1}{4qn}\right), k = 1, ..., pn$$

Sabemos pela relação de Girard, que a soma das raízes do polinômio acima é dado por $\frac{\binom{2pn}{2}}{\binom{2pn}{0}}$, sendo assim, teremos:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{pn} \zeta_k = \frac{\binom{2pn}{2}}{\binom{2pn}{0}} = \frac{\frac{2pn!}{2!(2pn-2)!}}{\frac{2pn!}{0!(2pn-0)!}} = pn(2pn-1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{pn} cot^2\left(\frac{2k-1}{4qn}\right) = pn(2pn-1)$

De onde segue que:

$$\sum_{k=1}^{pn} cot^2\left(\frac{2k-1}{4qn}\right) = pn(2pn-1) \tag{294}$$

$$\sum_{k=1}^{pn} \frac{1}{n^2} cot^2\left(\frac{2k-1}{4qn}\right) = 2p^2 - \frac{p}{n} \tag{295}$$

Usando que $cot^2 x + 1 = csc^2 x$ segue:

$$\sum_{k=1}^{pn} \frac{1}{n^2} csc^2\left(\frac{2k-1}{4qn}\right) = 2p^2 \tag{296}$$

Agora, veja que $cscx > 1/x$ e $cotx < 1/x$, sendo assim teremos:

$$2p^2 - \frac{p}{n} \leq (4q)^2 \sum_{k=1}^{pn} \frac{1}{(2k-1)^2} \leq 2p^2 \tag{297}$$

Observe que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(m+\frac{1}{2}\right)$, substituindo essa relação em (4), temos:

$$2p^2 - \frac{p}{n} \leq (4q)^2 \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}\psi^{(1)}\left(pn+\frac{1}{2}\right)\right) \leq 2p^2$$

$$2p^2 - \frac{p}{n} \leq 2p^2 - 4q^2\psi^{(1)}\left(pn+\frac{1}{2}\right) \leq 2p^2$$

$$-\frac{p}{n} \leq -4q^2\psi^{(1)}\left(pn+\frac{1}{2}\right) \leq 0$$

$$0 \leq 4q^2\psi^{(1)}\left(pn+\frac{1}{2}\right) \leq \frac{p}{n}$$

Observe que $q\pi = p \Rightarrow q^2 = \frac{p^2}{\pi^2}$, substituindo logo acima, temos:

$$0 \leq 4\frac{p^2}{\pi^2}\psi^{(1)}\left(pn+\frac{1}{2}\right) \leq \frac{p}{n}$$

$$0 \leq \psi^{(1)}\left(pn + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{\pi^2}{4pn}$$

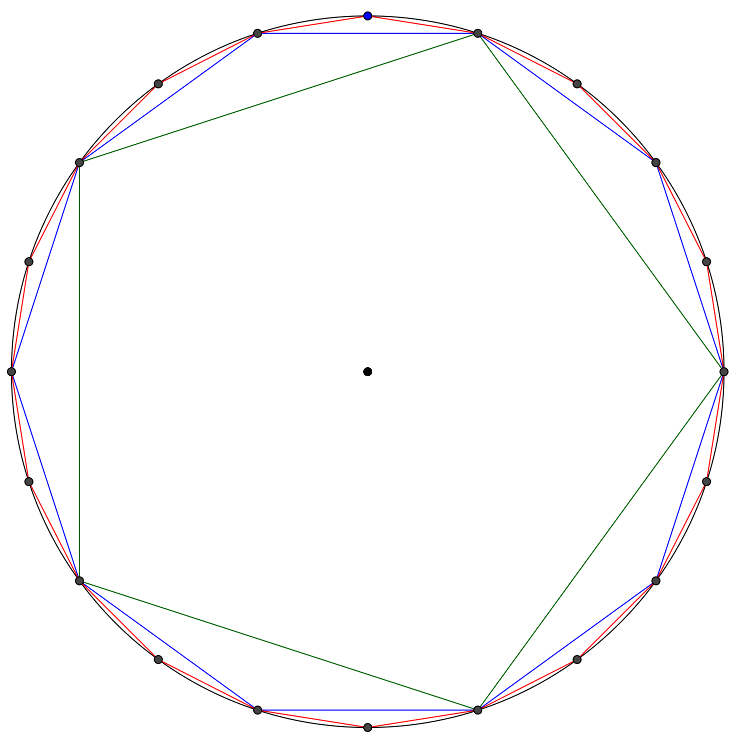
Fazendo $m = pn$, tem-se o resultado desejado.

59. Prove que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} sen\frac{\pi}{n} = 1$$

Solução:

Vamos decompor um círculo em um polígono de n partes.



Sabe-se que o lado de um polígono inscrito de n lados é igual a $2R \times sen\frac{\pi}{n}$.Sabe-se que o perímetro da circunferência é igual a $2\pi R$, sendo assim:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2Rsen\frac{\pi}{n} = 2\pi R$$

De onde segue o resultado.

60.(Problema sugerido por Israel Meireles Chrisostomo)Defina:

$$\sigma_{x,y} = \frac{(a_x + b_x)}{c_y^2}\left[(b_y - a_y) + b_y a_y + (c_y^2 - 1)\right], \forall x, y \in \mathbb{X} \mid \mathbb{X} = \{x, y \in \mathbb{N} \mid x - y = 1\}, \forall a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}^+ \mid c_1 \geq 1$$

Um grupo de quatro sequências recorrentes $(a)_n$, $(b)_n$, $(c)_n$ e $(\sigma)_{n,m}$, com leis de formação distintas, é chamado de " Quarteto de Liouville ", se para todo $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}^+ \mid c_1 \geq 1$, ocorre:

$$\sigma_{(n+2^{k+1}-1),(n-1)} = \frac{1}{a_{n+2^k-1}}\left(a_{n+2^{k+1}-1} \times \sigma_{(n+2^k-1),(n-1)} + a_{n-1} \times \sigma_{(n+2^{k+1}-1),(n+2^k-1)}\right),$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \wedge n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$$

Encontre as quatro sequências de um Quarteto de Liouville qualquer.

Solução:

Observe que(fazendo a substituição $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = tan(\theta)$):

$a+b = b\left(\frac{a}{b}+1\right) = b(tan^2(\theta)+1) = bsec^2(\theta) = bsec^2(\theta)(sen^2(\phi-\theta)+cos^2(\phi-\theta)) = b\left((tan(\theta)sen(\phi)+cos(\phi))^2 + (sen(\phi) - tan(\theta)cos(\phi))^2\right) = b\left(\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}sen(\phi)+cos(\phi)\right)^2 + \left(sen(\phi) - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}cos(\phi)\right)^2\right) = (\sqrt{a}sen(\phi)+\sqrt{b}cos(\phi))^2 + (\sqrt{b}sen(\phi) - \sqrt{a}cos(\phi))^2$

De onde concluímos:

$$a + b = (\sqrt{a}sen(\phi) + \sqrt{b}cos(\phi))^2 + (\sqrt{b}sen(\phi) - \sqrt{a}cos(\phi))^2 \qquad (298)$$

Dividindo ambos lados da expressão por $cos^2(\phi)$, temos:

$(a+b)sec^2(\phi) = (\sqrt{a}tan(\phi) + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b}tan(\phi) - \sqrt{a})^2$

Fazendo $c = sec(\phi) \Rightarrow tan(\phi) = \sqrt{c^2-1}$, substituindo na expressão logo acima, temos:

$$(a+b) = \left(\frac{\sqrt{a}\sqrt{c^2-1}+\sqrt{b}}{c}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b}\sqrt{c^2-1}-\sqrt{a}}{c}\right)^2 \qquad (299)$$

Substituindo a, b, c por a_1, b_1, c_1, teremos:

$$a_1 + b_1 = \left(\frac{\sqrt{a_1}\sqrt{c_1^2 - 1} + \sqrt{b_1}}{c_1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b_1}\sqrt{c_1^2 - 1} - \sqrt{a_1}}{c_1} \right)^2 = a_2 + b_2 \quad (300)$$

Onde a_2, b_2 estão bem definidos pelas sequências abaixo:

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{a_{n-1}}\sqrt{c_{n-1}^2 - 1} + \sqrt{b_{n-1}}}{c_{n-1}} \right)^2 \quad (301)$$

$$b_n = \left(\frac{\sqrt{b_{n-1}}\sqrt{c_{n-1}^2 - 1} - \sqrt{a_{n-1}}}{c_{n-1}} \right)^2 \quad (302)$$

Vamos provar que $a_1 + b_1 = a_n + b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, como base de indução considere (300).Como hipótese de indução considere:

$$a_1 + b_1 = a_{n-1} + b_{n-1} \quad (303)$$

Substituindo a por a_{n-1} , b por b_{n-1} e c por c_{n-1} na expressão (299), teremos:

$$a_{n-1} + b_{n-1} = \left(\frac{\sqrt{a_{n-1}}\sqrt{c_{n-1}^2 - 1} + \sqrt{b_{n-1}}}{c_{n-1}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b_{n-1}}\sqrt{c_{n-1}^2 - 1} - \sqrt{a_{n-1}}}{c_{n-1}} \right)^2 = a_n + b_n \quad (304)$$

Comparando (304) com (303), finalmente por indução, segue que:

$$a_1 + b_1 = a_n + b_n, \forall n \in \mathbb{N} \quad (305)$$

Agora nos resta provar que existe outra sequência que satisfaz a igualdade.Multiplicando (301) por b_{n-1} e (302) por a_{n-1} e subtraindo esses resultados, temos:

$$a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n = \left(\frac{\sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}\sqrt{c_{n-1}^2 - 1} + b_{n-1}}{c_{n-1}} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b_{n-1} a_{n-1}}\sqrt{c_{n-1}^2 - 1} - a_{n-1}}{c_{n-1}} \right)^2 =$$

$$\frac{b_{n-1}^2 + 2(a_{n-1} + b_{n-1})\sqrt{b_{n-1} a_{n-1}}\sqrt{c_{n-1}^2 - 1} - a_{n-1}^2}{c_{n-1}^2} \Rightarrow c_{n-1}^2 (a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n) =$$

$$(b_{n-1} + a_{n-1}) \left[(b_{n-1} - a_{n-1}) + 2\sqrt{b_{n-1} a_{n-1}}\sqrt{c_{n-1}^2 - 1} \right] \leq$$

$$(b_{n-1} + a_{n-1}) \left[(b_{n-1} - a_{n-1}) + b_{n-1} a_{n-1} + (c_{n-1}^2 - 1) \right]$$

Observando que usamos a desigualdade das médias, a igualdade ocorre apenas se $c_{n-1}^2 - 1 = b_{n-1}a_{n-1} \Rightarrow c_{n-1} = \sqrt{b_{n-1}a_{n-1}+1}$, isto é, a sequência $(c)_n$ é dada pela relação:

$$c_n = \sqrt{\left[\left(\frac{\sqrt{a_{n-1}}\sqrt{c_{n-1}^2-1}+\sqrt{b_{n-1}}}{c_{n-1}}\right)\times\left(\frac{\sqrt{b_{n-1}}\sqrt{c_{n-1}^2-1}-\sqrt{a_{n-1}}}{c_{n-1}}\right)\right]^2+1} \tag{306}$$

Então podemos dizer que se (306) é verdade então é verdadeira também a igualdade abaixo:

$$a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n = \frac{(b_{n-1}+a_{n-1})}{c_{n-1}^2}\left[(b_{n-1}-a_{n-1}) + b_{n-1}a_{n-1} + (c_{n-1}^2-1)\right] \tag{307}$$

Por (305) segue que $b_{n-1}+a_{n-1} = b_n + a_n$, sendo assim, teremos:

$$a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n = \frac{(b_n+a_n)}{c_{n-1}^2}\left[(b_{n-1}-a_{n-1}) + b_{n-1}a_{n-1} + (c_{n-1}^2-1)\right] \tag{308}$$

Defina:

$$a_xb_y - a_yb_x = \sigma_{x,y} \tag{309}$$

Vamos fazer a prova por indução, primeiro vamos fazer a base de indução, para tanto considere, que da igualdade acima seguem as igualdades:

$$\frac{a_nb_{n-1}}{a_{n-1}} - b_n = \frac{1}{a_{n-1}}\sigma_{n,n-1} \tag{310}$$

$$b_{n-1} - \frac{a_{n-1}b_n}{a_n} = \frac{1}{a_n}\sigma_{n,n-1} \tag{311}$$

Substituindo n por $n+1$ em (311), obtemos:

$$b_n - \frac{a_nb_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}}\sigma_{n+1,n} \tag{312}$$

Somando (312) com (310) e multiplicando o resultado por $\dfrac{a_{n+1}a_{n-1}}{a_n}$, obtemos:

$$a_{n+1}b_{n-1} - a_{n-1}b_{n+1} = \frac{1}{a_n}\left(a_{n+1}\sigma_{n,n-1} + a_{n-1}\sigma_{n+1,n}\right) \tag{313}$$

Mas por definição, sabemos que $a_{n+1}b_{n-1} - a_{n-1}b_{n+1} = \sigma_{n+1,n-1}$, de onde se conclui a base de indução(que é o caso em que $k=0$), ou seja:

$$\sigma_{n+1,n-1} = \frac{1}{a_n}\left(a_{n+1}\sigma_{n,n-1} + a_{n-1}\sigma_{n+1,n}\right) \tag{314}$$

Como hipótese de indução, suponha que a igualdade abaixo é válida para um k:

$$\sigma_{(n+2^{k+1}-1),(n-1)} = \frac{1}{a_{n+2^k-1}} \left(a_{n+2^{k+1}-1}\sigma_{(n+2^k-1),(n-1)} + a_{n-1}\sigma_{(n+2^{k+1}-1),(n+2^k-1)}\right) \tag{315}$$

Nosso objetivo torna-se mostrar que:

$$\sigma_{(n+2^{k+2}-1),(n-1)} = \frac{1}{a_{n+2^{k+1}-1}} \left(a_{n+2^{k+2}-1}\sigma_{(n+2^{k+1}-1),(n-1)} + a_{n-1}\sigma_{(n+2^{k+2}-1),(n+2^{k+1}-1)}\right) \tag{316}$$

Multiplique a hipótese de indução por $\dfrac{a_{n+2^{k+2}-1}}{a_{n+2^{k+1}-1}}$, de onde obteremos:

$$\frac{a_{n+2^{k+2}-1}}{a_{n+2^{k+1}-1}}\sigma_{(n+2^{k+1}-1),(n-1)} = \frac{1}{a_{n+2^k-1}} \left(a_{n+2^{k+2}-1}\sigma_{(n+2^k-1),(n-1)} + \frac{a_{n-1}a_{n+2^{k+2}-1}}{a_{n+2^{k+1}-1}}\sigma_{(n+2^{k+1}-1),(n+2^k-1)}\right)$$

Somando $\dfrac{a_{n-1}\sigma_{(n+2^{k+2}-1),(n+2^{k+1}-1)}}{a_{n+2^{k+1}-1}}$ em ambos os lados da igualdade acima, teremos:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{n+2^{k+2}-1}}{a_{n+2^{k+1}-1}}\sigma_{(n+2^{k+1}-1),(n-1)} + \frac{a_{n-1}\sigma_{(n+2^{k+2}-1),(n+2^{k+1}-1)}}{a_{n+2^{k+1}-1}} = \\
&\frac{1}{a_{n+2^k-1}} \left(a_{n+2^{k+2}-1}\sigma_{(n+2^k-1),(n-1)} + \frac{a_{n-1}a_{n+2^{k+2}-1}}{a_{n+2^{k+1}-1}}\sigma_{(n+2^{k+1}-1),(n+2^k-1)}\right) + \frac{a_{n-1}\sigma_{(n+2^{k+2}-1),(n+2^{k+1}-1)}}{a_{n+2^{k+1}-1}} = \\
&\frac{1}{a_{n+2^k-1}}\left[a_{n+2^{k+2}-1}(a_{n+2^k-1}b_{n-1} - a_{n-1}b_{n+2^k-1})\right. \\
&\left. + \frac{a_{n-1}a_{n+2^{k+2}-1}}{a_{n+2^{k+1}-1}}(a_{n+2^{k+1}-1}b_{n+2^k-1} - a_{n+2^k-1}b_{n+2^{k+1}-1})\right] + \\
&\frac{a_{n-1}(a_{n+2^{k+2}-1}b_{n+2^{k+1}-1} - a_{n+2^{k+1}-1}b_{n+2^{k+2}-1})}{a_{n+2^{k+1}-1}} \\
&= a_{n+2^{k+2}-1}b_{n-1} - a_{n-1}b_{n+2^{k+2}-1} = \sigma_{n+2^{k+2}-1,n-1}
\end{aligned}$$

Conluindo assim a prova por indução.Há porém, uma maneira mais fácil de se provar isso.Veja:

$$\sigma_{(m+2^{k+1}-1),(m-1)} = a_{m+2^{k+1}-1}b_{m-1} - a_{m-1}b_{m+2^{k+1}-1} \tag{317}$$

Fazendo $m = n$ em (317) e dividindo o resultado por a_{n-1}, teremos:

$$\frac{\sigma_{(n+2^{k+1}-1),(n-1)}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+2^{k+1}-1}b_{n-1}}{a_{n-1}} - b_{n+2^{k+1}-1} \tag{318}$$

Fazendo a substituição $m = n + 2^{k+1}$ em (317), teremos:

$$\sigma_{(n+2^{k+2}-1),(n+2^{k+1}-1)} = a_{n+2^{k+2}-1}b_{n+2^{k+1}-1} - a_{n+2^{k+1}-1}b_{n+2^{k+2}-1} \qquad (319)$$

Dividindo (319) por $a_{n+2^{k+2}-1}$, teremos:

$$\frac{\sigma_{(n+2^{k+2}-1),(n+2^{k+1}-1)}}{a_{n+2^{k+2}-1}} = b_{n+2^{k+1}-1} - \frac{a_{n+2^{k+1}-1}b_{n+2^{k+2}-1}}{a_{n+2^{k+2}-1}} \qquad (320)$$

Somando (320) com (318) e multiplicando o resultado por $\dfrac{a_{n+2^{k+2}-1}a_{n-1}}{a_{n+2^{k+1}-1}}$, temos que:

$$a_{n+2^{k+2}-1}b_{n-1}-a_{n-1}b_{n+2^{k+2}-1} = \frac{1}{a_{n+2^{k+1}-1}}\left(a_{n+2^{k+2}-1}\sigma_{(n+2^{k+1}-1),(n-1)} + a_{n-1}\sigma_{(n+2^{k+2}-1),(n+2^{k+1}-1)}\right) \qquad (321)$$

Mas por definição $\sigma_{(n+2^{k+2}-1),(n-1)} = a_{n+2^{k+2}-1}b_{n-1} - a_{n-1}b_{n+2^{k+2}-1}$, de onde segue o resultado.

61.(The American Mathematical Monthly)Considere um triângulo ABC e um ponto P do mesmo plano. Sejam P_A, P_B, P_C as projeções ortogonais de P nos lados BC, CA, AB respectivamente. Prove a desigualdade[19]:

$$AP + BP + CP \geq 2(PP_A + PP_B + PP_C)$$

Solução:
Sejam a, b, c lados de um triângulo, então defina a função:

$$f(a,b,c,x,y,z) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 \tag{322}$$

Observe que:

$$f(a,b,c,x,y,z) = \frac{(a^2+c^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)}{2}x^2 + \frac{(b^2+c^2-a^2)+(a^2+b^2-c^2)}{2}y^2 + \frac{(b^2+c^2-a^2)+(a^2+c^2-b^2)}{2}z^2 \tag{323}$$

Observe que pela desigualdade das médias temos que:

$$\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2}x^2 + \frac{(a^2+c^2-b^2)}{2}z^2 \geq xz(a^2+c^2-b^2) \tag{324}$$

$$\frac{(a^2+b^2-c^2)}{2}x^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2)}{2}y^2 \geq xy(a^2+b^2-c^2) \tag{325}$$

$$\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2}y^2 + \frac{(b^2+c^2-a^2)}{2}z^2 \geq yz(b^2+c^2-a^2) \tag{326}$$

Somando (324), (325) e (326) temos que:

$$f(a,b,c,x,y,z) \geq xz(a^2+c^2-b^2) + xy(a^2+b^2-c^2) + yz(b^2+c^2-a^2) \tag{327}$$

Pela lei dos cossenos segue que $b^2 + c^2 - a^2 = 2bccos\alpha, a^2 + c^2 - b^2 = 2accos\beta, a^2 + b^2 - c^2 = 2abcos\gamma$, substituindo em (327), temos:

$$f(a,b,c,x,y,z) \geq 2xzac \times cos\beta + 2xyab \times cos\gamma + 2yzbc \times cos\alpha \tag{328}$$

Substituindo (322) em (328), temos que:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 \geq 2xzac \times cos\beta + 2xyab \times cos\gamma + 2yzbc \times cos\alpha \tag{329}$$

Fazendo $ax = x', by = y', cz = z'$ e substituindo logo acima teremos:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 \geq 2x'z'cos\beta + 2x'y'cos\gamma + 2y'z'cos\alpha \tag{330}$$

[19]Essa desigualdade é conhecida como desigualdade de Erdös-Mordell.

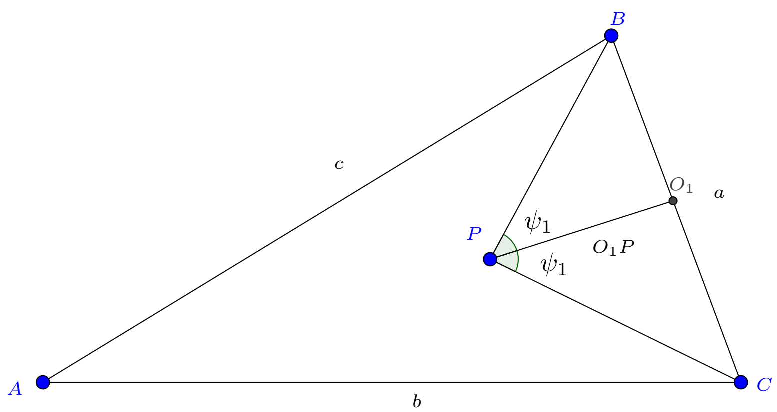
Em outras palavras, o que provamos foi que se x, y, z são reais positivos e $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, então vale:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2yz \times cos\alpha + 2xz \times cos\beta + 2xy \times cos\gamma \tag{331}$$

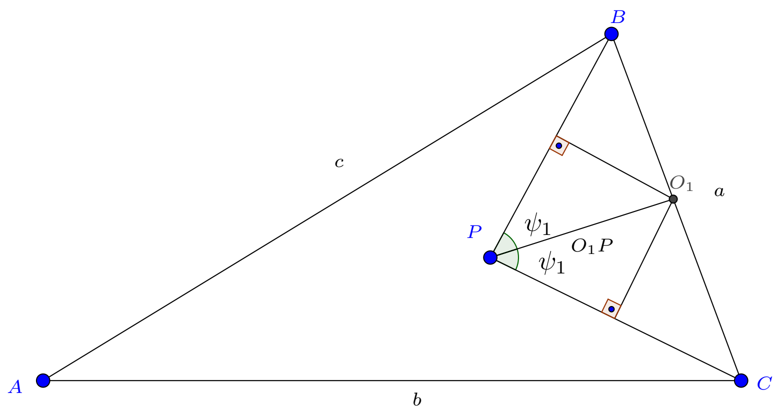
Fazendo $x = \sqrt{AP}, y = \sqrt{BP}, z = \sqrt{CP}$, teremos:

$$AP+BP+CP \geq 2\sqrt{BP}\sqrt{CP}cos\alpha+2\sqrt{AP}\sqrt{CP}cos\beta+2\sqrt{AP}\sqrt{BP}cos\gamma \tag{332}$$

Tracemos um triângulo ΔABC e um ponto P interior ao triângulo.Tracemos a bissetriz do ângulo $\widehat{BPC}$:



Observe que a área A_{BPC} do triângulo ΔBPC é igual a soma das áreas A_{BPO_1} e A_{CPO_1} dos triângulos ΔBPO_1 e ΔCPO_1, respectivamente.Tracemos as alturas desses dois últimos triângulos:



Observe que:

$$A_{BPO_1} = \frac{BP \times O_1P \times sen\psi_1}{2} \tag{333}$$

$$A_{CPO_1} = \frac{CP \times O_1P \times sen\psi_1}{2} \tag{334}$$

$$A_{BPC} = \frac{BP \times CP \times sen(2\psi_1)}{2} \tag{335}$$

Comparando as igualdades acima teremos:

$$BP \times CP \times sen(2\psi_1) = CP \times O_1P \times sen\psi_1 + BP \times O_1P \times sen\psi_1 \tag{336}$$

Usando que $sen(2x) = 2senxcosx$, teremos:

$$O_1P = \frac{2BP \times CP \times cos(\psi_1)}{BP + CP}$$

Por simetria, concluímos:

$$O_1P = \frac{2BP \times CP \times cos(\psi_1)}{BP + CP} \tag{337}$$

$$O_2P = \frac{2AP \times CP \times cos(\psi_2)}{AP + CP} \tag{338}$$

$$O_3P = \frac{2AP \times BP \times cos(\psi_3)}{AP + BP} \tag{339}$$

De (332), note que $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \pi$, e usando que a média geométrica é maior ou igual a média harmônica, temos que:

$$AP + BP + CP \geq 2(O_1P + O_2P + O_3P) \tag{340}$$

A desigualdade segue diretamente do fato de que O_1P, O_2P, O_3P são respectivamente maiores ou iguais às respectivas distâncias de P aos lados(por definição a distância é o menor caminho que une o ponto à reta).

62.(Complex Analysis Homework/Caltech-California Institute of Technology)Prove a Fórmula da Reflexão de Euler:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{sen(a\pi)}$$

Solução: Observe que:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y,x) \tag{341}$$

Fazendo a substituição $t = tan^2\theta \Rightarrow dt = 2tan\theta sec^2\theta d\theta$, teremos:

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} tan^{2a-1}\theta d\theta$$

Observe que, pela forma trigonométrica da função beta:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} tan^{2a-1}\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2a-1}\theta cos^{1-2a}\theta d\theta = B(1-a,a) = B(a,1-a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(a+1-a)} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)} = \Gamma(a)\Gamma(1-a)$$

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}dt + \int_1^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}dt \tag{342}$$

Considere a integral:

$$\int_1^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}dt \tag{343}$$

Fazendo a substituição $t = \dfrac{1}{x} \Rightarrow dt = -\dfrac{1}{x^2}dx$, substituindo logo acima teremos:

$$\int_1^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}dt = -\int_1^0 \frac{x^{-a}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x}dx \tag{344}$$

Usando que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{t^{-a}}{1+t}dt$ Aplicando esses dois últimos resultados em (342) teremos:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}dt + \int_0^1 \frac{t^{-a}}{1+t}dt \tag{345}$$

Usando a série geométrica, sabemos que $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k$, e substituindo em (345) teremos:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{k+a-1} dt + \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{k-a} dt \tag{346}$$

Integrando termo a termo, teremos:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+a} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k-a+1} =$$

$$\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+a} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k-a+1} =$$

$$\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+a} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{1}{k-a} =$$

$$\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \left(-\frac{1}{k+a} + \frac{1}{k-a}\right) =$$

$$\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{2a}{k^2-a^2}$$

De onde segue finalmente que:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{2a}{k^2-a^2}$$

Usando que a série infinita ao lado direito converge para $\frac{\pi}{sen(a\pi)}$, teremos:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{sen(a\pi)}$$

63. Mostre que a sequência converge:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \tag{347}$$

Solução:

Toda sequência monótona limitada é convergente.Basta provarmos que a sequência é limitada.

$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} \Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n} \right) \Rightarrow$
$0 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 2$

64. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_m$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + ... + \lambda_m = 1$,e

$a_{x,y} \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in \mathbb{N}$, prove que:

$(a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + ... + a_{1,n})^{\lambda_1}(a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + ... + a_{2,n})^{\lambda_2}....(a_{m,1} + a_{m,2} + a_{m,3} + ... + a_{m,n})^{\lambda_m} \geq a_{1,1}^{\lambda_1}a_{2,1}^{\lambda_2}...a_{m,1}^{\lambda_m} + a_{1,2}^{\lambda_1}a_{2,2}^{\lambda_2}...a_{m,2}^{\lambda_m} + ... + a_{1,n}^{\lambda_1}a_{2,n}^{\lambda_2}...a_{m,n}^{\lambda_m}$

Essa desigualdade é conhecida como desigualdade de Holder.

Solução:

Demonstração. Vamos proceder por indução sobre m.Como base de indução tome $\lambda_1+\lambda_2 = 1$, isto é, como base de indução tome que a seguinte desigualdade é verdadeira:

$(a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + ... + a_{1,n})^{\lambda_1}(a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + ... + a_{2,n})^{\lambda_2} \geq a_{1,1}^{\lambda_1}a_{2,1}^{\lambda_2} + a_{1,2}^{\lambda_1}a_{2,2}^{\lambda_2} + ... + a_{1,n}^{\lambda_1}a_{2,n}^{\lambda_2}$

Como a desigualdade é homogênea, suponha sem perda de generalidade que $a_{1,1} + ... + a_{1,n} = 1 = a_{2,1} + ... + a_{2,n}$.Pela desigualdade de Jensen, aplicada a função $f(x) = a^x$, que é convexa, sabemos que vale:

$$\lambda_1 a^{x_1} + \lambda_2 a^{x_2} \geq a^{x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2} \tag{348}$$

Fazendo $a = \dfrac{a_{2,i}}{a_{1,i}}$ e $x_1 = 0, x_2 = 1$ teremos:

$$\lambda_1 + \lambda_2\frac{a_{2,i}}{a_{1,i}} \geq \left(\frac{a_{2,i}}{a_{1,i}}\right)^{\lambda_2} \tag{349}$$

Multiplicando (349) por $a_{1,i}$ teremos:

$$\lambda_1 a_{1,i} + \lambda_2 a_{2,i} \geq a_{1,i}\left(\frac{a_{2,i}}{a_{1,i}}\right)^{\lambda_2} = a_{1,i}^{1-\lambda_2}a_{2,i}^{\lambda_2} = a_{1,i}^{\lambda_1}a_{2,i}^{\lambda_2} \tag{350}$$

De onde concluímos:

$$\lambda_1 a_{1,i} + \lambda_2 a_{2,i} \geq a_{1,i}^{\lambda_1}a_{2,i}^{\lambda_2}$$

Aplicando somatório variando em i em ambos os lados da desigualdade, teremos:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}^{\lambda_1}a_{2,i}^{\lambda_2} \leq \sum_{i=1}^{n}(\lambda_1 a_{1,i} + \lambda_2 a_{2,i}) = \lambda_1\sum_{i=1}^{n} a_{1,i} + \lambda_2\sum_{i=1}^{n} a_{2,i} = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}\right)^{\lambda_1} \times \left(\sum_{i=1}^{n} a_{2,i}\right)^{\lambda_2}$$

Vamos agora provar o caso geral.Como hipótese de indução, tome:

$$(a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}+...+a_{1,n})^{\sigma_1}(a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}+...+a_{2,n})^{\sigma_2}....(a_{m,1}+a_{m,2}+a_{m,3}+...+a_{m,n})^{\sigma_m} \geq a_{1,1}^{\sigma_1}a_{2,1}^{\sigma_2}...a_{m,1}^{\sigma_m}+a_{1,2}^{\sigma_1}a_{2,2}^{\sigma_2}...a_{m,2}^{\sigma_m}+...+a_{1,n}^{\sigma_1}a_{2,n}^{\sigma_2}...a_{m,n}^{\sigma_m}$$

Tal que $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+....+\sigma_m=1$.Mostremos que ela vale para $m+1$, tome $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+....+\lambda_{m+1}=1$ e seja $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+...+\lambda_m=\lambda$, usando a hipótese de indução e a base de indução (observe que $\lambda+\lambda_{m+1}=1$ e também $\dfrac{\lambda_1+...+\lambda_m}{\lambda}=1$), teremos :

$$(a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}+...+a_{1,n})^{\lambda_1}(a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}+...+a_{2,n})^{\lambda_2}....(a_{m,1}+a_{m,2}+a_{m,3}+...+a_{m,n})^{\lambda_m}(a_{m+1,1}+a_{m+1,2}+a_{m+1,3}+...+a_{m+1,n})^{\lambda_{m+1}}=$$
$$\left[(a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}+...+a_{1,n})^{\frac{\lambda_1}{\lambda}}(a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}+...+a_{2,n})^{\frac{\lambda_2}{\lambda}}....(a_{m,1}+a_{m,2}+a_{m,3}+...+a_{m,n})^{\frac{\lambda_m}{\lambda}}\right]^{\lambda}$$
$$\times(a_{m+1,1}+a_{m+1,2}+a_{m+1,3}+...+a_{m+1,n})^{\lambda_{m+1}}\geq$$
$$\left[a_{1,1}^{\frac{\lambda_1}{\lambda}}a_{2,1}^{\frac{\lambda_2}{\lambda}}...a_{m,1}^{\frac{\lambda_m}{\lambda}}+a_{1,2}^{\frac{\lambda_1}{\lambda}}a_{2,2}^{\frac{\lambda_2}{\lambda}}...a_{m,2}^{\frac{\lambda_m}{\lambda}}+...+a_{1,n}^{\frac{\lambda_1}{\lambda}}a_{2,n}^{\frac{\lambda_2}{\lambda}}...a_{m,n}^{\frac{\lambda_m}{\lambda}}\right]^{\lambda}\times(a_{m+1,1}+a_{m+1,2}+a_{m+1,3}+...+a_{m+1,n})^{\lambda_{m+1}}\geq a_{1,1}^{\lambda_1}a_{2,1}^{\lambda_2}...a_{m,1}^{\lambda_m}a_{m+1,1}^{\lambda_{m+1}}+a_{1,2}^{\lambda_1}a_{2,2}^{\lambda_2}...a_{m,2}^{\lambda_m}a_{m+1,2}^{\lambda_{m+1}}+...+a_{1,n}^{\lambda_1}a_{2,n}^{\lambda_2}...a_{m,n}^{\lambda_m}a_{m+1,n}^{\lambda_{m+1}}$$ $\square$

65.(Mathematics Stack Exchange Question)Can you help me to prove that

$$(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)$$

for $n \geq 1$ and $x, y \geq 0$.

I tried by induction, but I didn't get a result.

Solução 1:É uma aplicação direta da desigualdade de Jensen, para ver isso basta dividir os dois lados 2^n.

Solução 2: Suponha sem perda de generalidade que $x \geq y$ e tome $p \geq k$.Então isto implica que:

$x^{p-k} \geq y^{p-k} \Rightarrow x^{p-k} - y^{p-k} \geq 0$

Veja também que $x^k \geq y^k$ então podemos multiplicar os dois lados dessa desigualdade por $x^{p-k} - y^{p-k}$ sem alterarmos a expressão, daí segue que:

$$(x^{p-k} - y^{p-k})x^k \geq y^k(x^{p-k} - y^{p-k})$$

De onde concluímos:

$$x^p + y^p \geq x^{p-k}y^k + x^k y^{p-k} \tag{351}$$

Multiplique a desigualdade (351) por $\binom{p}{k}$ e teremos:

$$(x^p + y^p)\binom{p}{k} \geq \binom{p}{k}x^{p-k}y^k + \binom{p}{k}x^k y^{p-k} \tag{352}$$

Aplicando o somatório variando em k em ambos os lados da desigualdade acima teremos:

$$(x^p + y^p)\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} \geq \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{p-k}y^k + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k y^{p-k} \tag{353}$$

De onde concluímos:

$$(x^p + y^p)2^p \geq 2(x + y)^p \tag{354}$$

De onde finalmente segue o resultado, basta dividir os dois lados por 2.

66.(Cálculo, Volume 2-Serge Lang)Sejam $B_1, ..., B_n$ vetores de comprimento 1 no espaço n-dimensional e mutuamente perpendiculares, isto é, $B_i.B_j = 0$ para $i \neq j$.Seja A um vetor no espaço n-dimensional, seja c_i a componente de A ao longo de B_i.Sejam $x_1, ..., x_n$ números.Mostre que:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k B_k - A \right\| \geq \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k B_k - A \right\|$$

Solução 1:

Demonstração. Sejam $B_j = (b_{j,1}, ..., b_{j,n})$ e $A = (a_1, ..., a_n)$ então pelo enunciado $c_j = \dfrac{A.B_j}{B_j^2} = \dfrac{a_1 b_{j,1} + ... + a_n b_{j,n}}{b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2}$. Além disso sabemos, pelo enunciado, que $b_{j,1}b_{k,1} + ... + b_{k,n}b_{j,n} = 0$ para $k \neq j$.Vamos provar algo mais forte do que o problema pede, vamos trocar a condição de $b_{j,1}b_{k,1} + ... + b_{k,n}b_{j,n} = 0$ para a que está logo abaixo(a desigualdade (355)), que é bem mais geral.Além disso, não há necessidade de que as normas dos Bj's sejam iguais a 1(a norma pode assumir qualquer valor que a desigualdade é verdadeira):

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j<k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k (b_{j,1}b_{k,1} + ... + b_{j,n}b_{k,n}) \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j<k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j c_k (b_{j,1}b_{k,1} + ... + b_{j,n}b_{k,n}) \quad (355)$$

Essa última desigualdade é equivalente a desigualdade abaixo, o que nos mostra uma relação simétrica entre as desigualdades que é particularmente bela(justamente pelos padrões envolvidos):

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k B_k \right\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \|x_k B_k\|^2 \geq \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k B_k \right\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \|c_k B_k\|^2$$

Observe que a desigualdade abaixo é verdadeira, pois o quadrado de todo número real é positivo:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(c_j \sqrt{b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2} - x_j \sqrt{b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2} \right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^2 (b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2) - 2 \sum_{j=1}^{n} x_j c_j (b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2) + \sum_{j=1}^{n} (b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2) x_j^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{n} x_j c_j (b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2) + \sum_{j=1}^{n} x_j^2 (b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2) \geq \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j^2 (b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - 2\sum_{j=1}^{n} x_j(a_1 b_{j,1} + ... + a_n b_{j,n}) + \sum_{j=1}^{n} x_j^2(b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2) \geq \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j^2(b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2)$$

Multiplicando a desigualdade (355) por 2 e somando com a desigualdade acima, teremos:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - 2\sum_{j=1}^{n} x_j a_1 b_{j,1} - ... - 2\sum_{j=1}^{n} x_j a_n b_{j,n} + \sum_{j=1}^{n} x_j^2 b_{j,1}^2 + ... + \sum_{j=1}^{n} x_j^2 b_{j,n}^2 + 2\sum_{\substack{j=1\\ j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k b_{j,1} b_{k,1} + ... +$$

$$+2\sum_{\substack{j=1\\ j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k b_{j,n} b_{k,n} \geq \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j^2(b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2) + 2\sum_{\substack{j=1\\ j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j c_k(b_{j,1} b_{k,1} + ... + b_{j,n} b_{k,n}) \Leftrightarrow$$

$$\left(a_1^2 - 2\sum_{j=1}^{n} x_j a_1 b_{j,1} + 2\sum_{\substack{j=1\\ j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k b_{j,1} b_{k,1} + \sum_{j=1}^{n} x_j^2 b_{j,1}^2\right) + ... + \left(a_n^2 - 2\sum_{j=1}^{n} x_j a_n b_{j,n}\right.$$

$$\left. +2\sum_{\substack{j=1\\ j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k b_{j,n} b_{k,n} + \sum_{j=1}^{n} x_j^2 b_{j,n}^2\right) \geq \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j^2(b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2)$$

$$+2\sum_{\substack{j=1\\ j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j c_k(b_{j,1} b_{k,1} + ... + b_{j,n} b_{k,n}) \Leftrightarrow$$

$$\left(a_1^2 - 2a_1\sum_{j=1}^{n} x_j b_{j,1} + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_{j,1}\right)^2\right) + ... + \left(a_n^2 - 2a_n\sum_{j=1}^{n} x_j b_{j,n} + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_{j,n}\right)^2\right) \geq$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j^2(b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2) + 2\sum_{\substack{j=1\\ j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j c_k(b_{j,1} b_{k,1} + ... + b_{j,n} b_{k,n}) \Leftrightarrow$$

$$\left(a_1 - \sum_{j=1}^{n} x_j b_{j,1}\right)^2 + ... + \left(a_n - \sum_{j=1}^{n} x_j b_{j,n}\right)^2 \geq \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j^2(b_{j,1}^2 + ... + b_{j,n}^2)$$

$$+2\sum_{\substack{j=1\\ j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j c_k(b_{j,1} b_{k,1} + ... + b_{j,n} b_{k,n}) \Leftrightarrow$$

$$\|A-(x_1B_1+...+x_nB_n)\|^2 \geq \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j^2(b_{j,1}^2+...+b_{j,n}^2) + 2\sum_{\substack{j=1\\j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_jc_k(b_{j,1}b_{k,1}+...+b_{j,n}b_{k,n})$$

Veja que:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j^2(b_{j,1}^2+...+b_{j,n}^2) + 2\sum_{\substack{j=1\\j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_jc_k(b_{j,1}b_{k,1}+...+b_{j,n}b_{k,n}) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - 2\sum_{j=1}^{n} c_j^2(b_{j,1}^2+...+b_{j,n}^2) + \sum_{j=1}^{n} c_j^2(b_{j,1}^2+...+b_{j,n}^2) + 2\sum_{\substack{j=1\\j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_jc_k(b_{j,1}b_{k,1}+...+b_{j,n}b_{k,n}) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - 2\sum_{j=1}^{n} c_j(a_1b_{j,1}+...+a_nb_{j,n}) + \sum_{j=1}^{n} c_j^2(b_{j,1}^2+...+b_{j,n}^2) + 2\sum_{\substack{j=1\\j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_jc_k(b_{j,1}b_{k,1}+...+b_{j,n}b_{k,n}) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - 2\sum_{j=1}^{n} c_ja_1b_{j,1} - ... - 2\sum_{j=1}^{n} c_ja_nb_{j,n} + \sum_{j=1}^{n} c_j^2b_{j,1}^2 + ... + \sum_{j=1}^{n} c_j^2b_{j,n}^2 + 2\sum_{\substack{j=1\\j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_jc_kb_{j,1}b_{k,1} + ...+$$

$$+2\sum_{\substack{j=1\\j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_jc_kb_{j,n}b_{k,n} =$$

$$\left(a_1^2 - 2\sum_{j=1}^{n} c_ja_1b_{j,1} + 2\sum_{\substack{j=1\\j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_jc_kb_{j,1}b_{k,1} + \sum_{j=1}^{n} c_j^2b_{j,1}^2\right) + ... + \left(a_n^2 - 2\sum_{j=1}^{n} c_ja_nb_{j,n}\right.$$

$$\left. +2\sum_{\substack{j=1\\j<k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_jc_kb_{j,n}b_{k,n} + \sum_{j=1}^{n} c_j^2b_{j,n}^2\right) =$$

$$\left(a_1^2 - 2a_1\sum_{j=1}^{n} c_jb_{j,1} + \left(\sum_{j=1}^{n} c_jb_{j,1}\right)^2\right) + ... + \left(a_n^2 - 2a_n\sum_{j=1}^{n} c_jb_{j,n} + \left(\sum_{j=1}^{n} c_jb_{j,n}\right)^2\right) =$$

$$\left(a_1 - \sum_{j=1}^{n} c_jb_{j,1}\right)^2 + ... + \left(a_n - \sum_{j=1}^{n} c_jb_{j,n}\right)^2 = \|A-(c_1B_1+...+c_nB_n)\|^2$$

$\square$

Solução 2:

Demonstração. Primeiramente vamos provar que se $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}$ são vetores não nulos e mutuamente perpendiculares no espaço n-dimensional, então, para todo x real vale que:

$$\left\| \overrightarrow{U} + x\overrightarrow{V} \right\| \geq \left\| \overrightarrow{U} \right\| \tag{356}$$

Observe que

$$x^2\overrightarrow{V}^2 \geq 0 \Rightarrow \underbrace{2x\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V}}_{0} + x^2\overrightarrow{V}^2 \geq 0 \Rightarrow \overrightarrow{U}^2 + 2x\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V} + x^2\overrightarrow{V}^2 \geq \overrightarrow{U}^2 \Rightarrow \left\| \overrightarrow{U} + x\overrightarrow{V} \right\|^2 \geq \left\| \overrightarrow{U} \right\|^2 \Rightarrow \left\| \overrightarrow{U} + x\overrightarrow{V} \right\| \geq \left\| \overrightarrow{U} \right\|$$

Agora, veja que, para todo i natural, vale que:

$$\overrightarrow{B}_i^2 = 1 \Rightarrow c_i\overrightarrow{B}_i^2 = c_i = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}_i \Rightarrow c_i\overrightarrow{B_i}.\overrightarrow{B_i} - \overrightarrow{A}.\overrightarrow{B_i} = 0 \Rightarrow c_i\overrightarrow{B_i}.\overrightarrow{B_i} - \overrightarrow{A}.\overrightarrow{B_i} + \underbrace{\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq i}} c_k\overrightarrow{B_i}.\overrightarrow{B_k}}_{0} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} c_k\overrightarrow{B_k}.\overrightarrow{B_i} - \overrightarrow{A}.\overrightarrow{B_i} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{A} - \sum_{k=1}^{n} c_k\overrightarrow{B_k}\right).\overrightarrow{B_i} = 0$$

Disso concluímos que para qualquer real $x_i, \forall i \in \mathbb{N}$, vale que:

$$x_1\left(\overrightarrow{A} - \sum_{k=1}^{n} c_k\overrightarrow{B_k}\right).\overrightarrow{B_1} + ... + x_n\left(\overrightarrow{A} - \sum_{k=1}^{n} c_k B_k\right).\overrightarrow{B_n} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\overrightarrow{B_k}\right).\left(\overrightarrow{A} - \sum_{k=1}^{n} c_k\overrightarrow{B_k}\right) = 0$$

Do resultado acima e de (356), segue que:

$$\left\| x\sum_{k=1}^{n} x_k\overrightarrow{B_k} + \overrightarrow{A} - \sum_{k=1}^{n} c_k\overrightarrow{B_k} \right\| \geq \left\| \overrightarrow{A} - \sum_{k=1}^{n} c_k\overrightarrow{B_k} \right\| \tag{357}$$

Substituindo x_k por $-x_k/x + c_k/x$ em (357), chega-se ao resultado desejado. □

67.(Cálculo, Volume 1-Serge Lang)Provar por indução que para todo inteiro positivo n,$sen(nx)$, pode ser expresso como uma soma de termos

$$\sum a_{ij}(senx)^i(cosx)^j$$

Onde a_{ij} são inteiros.

Solução: Como base de indução tome n=1 e n=2, isto é $senx = sen^1 x cos^0 x$ e $sen(2x) = 2sen^1 x cos^1 x$, como hipótese de indução, suponha válido que $sen(nx) = \sum a_{ij}(senx)^i(cosx)^j$ e $sen((n-1)x) = \sum a_{kl}(senx)^k(cosx)^l$.Usando que $sen((n+1)x) + sen((n-1)x) = 2sen(nx)cosx$ teremos:

$$sen((n+1)x) = 2sen(nx)cosx - sen((n-1)x) = 2\sum a_{ij}(senx)^i(cosx)^{j+1} - \sum a_{kl}(senx)^k(cosx)^l$$

E isto resolve o problema.

68.(OBM-U/2004)Calcule:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}$$

Solução:
Observe que, pela fórmula da P.G. infinita temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)} = \lim_{\varepsilon \to 1} \int_0^{\varepsilon} \int_0^{z} \int_0^{y} \frac{1}{1-x^3} dxdydz$$

Calculando essa integral, teremos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)} = \lim_{\varepsilon \to 1} \int_0^{\varepsilon} \int_0^{z} \int_0^{y} \frac{1}{1-x^3} dxdydz = \frac{\sqrt{3}\pi - 3ln3}{12}$$

69. Prove a desigualdade 1 desse artigo, isto é, se alpha beta e gamma são ângulos de um triângulo, então vale a desigualdade:

$$cos\alpha + cos\beta + cos\gamma \leq sen\frac{\alpha}{2} + sen\frac{\beta}{2} + sen\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$$

Solução:

Já provamos na questão 5, que $cosA + cosB + cosC \leq \frac{3}{2}$.Seja $A = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, A = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}, A = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, observe que $A + B + C = \pi$ e dessa forma teremos $sen\frac{\alpha}{2} + sen\frac{\beta}{2} + sen\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$.Provemos agora que $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma \leq sen\frac{\alpha}{2} + sen\frac{\beta}{2} + sen\frac{\gamma}{2}$.Observe que:

$$cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \leq 1 \Rightarrow 2cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \leq 2cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 2sen\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow$$

$$cos\alpha + cos\beta \leq 2sen\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Por simetria, concluímos as desigualdades:

$$cos\alpha + cos\beta \leq 2sen\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$cos\alpha + cos\gamma \leq 2sen\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$cos\beta + cos\gamma \leq 2sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Somando as três desigualdades, conclui-se a prova.

70. Prove a desigualdade 2 desse artigo, isto é, se alpha beta e gamma são ângulos de um triângulo, então vale a desigualdade:

$$sen\alpha + sen\beta + sen\gamma \leq cos\frac{\alpha}{2} + cos\frac{\beta}{2} + cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Solução:
Observe que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \tag{358}$$

Multiplicando a desigualdade acima por 2 e somando $a^2 + b^2 + c^2$, tem-se:

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq (a + b + c)^2 \tag{359}$$

Fazendo $a = cos\frac{\alpha}{2}, b = cos\frac{\beta}{2}, c = cos\frac{\gamma}{2}$, temos:

$$3cos^2\frac{\alpha}{2} + 3cos^2\frac{\beta}{2} + 3cos^2\frac{\gamma}{2} \geq \left(cos\frac{\alpha}{2} + cos\frac{\beta}{2} + cos\frac{\gamma}{2}\right)^2 \tag{360}$$

Observe que $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2cos^2\frac{\alpha}{2} + 2cos^2\frac{\beta}{2} + 2cos^2\frac{\gamma}{2} - 3 \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3cos^2\frac{\alpha}{2} + 3cos^2\frac{\beta}{2} + 3cos^2\frac{\gamma}{2} \leq \frac{27}{4}$, assim:

$$3cos^2\frac{\alpha}{2} + 3cos^2\frac{\beta}{2} + 3cos^2\frac{\gamma}{2} \leq \frac{27}{4} \tag{361}$$

De (360) e (361), por transitividade se prova o lado direito.Para provar o lado esquerdo, veja que:

$$cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \leq 1 \Rightarrow 2sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \leq 2sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 2cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow$$

$$sen\alpha + sen\beta \leq 2cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Por simetria, concluímos as desigualdades:

$$sen\alpha + sen\beta \leq 2cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$sen\alpha + sen\gamma \leq 2cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$sen\beta + sen\gamma \leq 2cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Somando essas três últimas desigualdades, chega-se ao resultado.

71. Prove a desigualdade 3 desse artigo, isto é, se alpha beta e gamma são ângulos de um triângulo, então vale a desigualdade:

$$cos\alpha cos\beta cos\gamma \leq sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$

Solução:

Como já provamos o lado direito de três formas diferentes, resta provar o lado esquerdo.Observe que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

Somando $2ab + 2bc + 2ac$, teremos:

$$(a + b + c)^2 \geq 3ab + 3bc + 3ac$$

Suponha sem perda de generalidade que α, β, γ sejam ângulos agudos.Substituindo por tangentes, teremos:

$$(tan\alpha + tan\beta + tan\gamma)^2 \geq 3tan\alpha tan\beta + 3tan\beta tan\gamma + 3tan\alpha tan\gamma$$

Usando a identidade 7, essa desiguadade pode ser reescrita como:

$$(tan\alpha tan\beta tan\gamma)^2 \geq 3tan\alpha tan\beta + 3tan\beta tan\gamma + 3tan\alpha tan\gamma \Leftrightarrow$$

$$tan\alpha tan\beta tan\gamma \geq 3cot\alpha + 3cot\beta + 3cot\gamma \tag{362}$$

Pela desigualdade de Jensen, sabemos que vale:

$$3cot\alpha + 3cot\beta + 3cot\gamma \geq 3\sqrt{3} \tag{363}$$

De (363) e (362), concluímos por transitividade que:

$$tan\alpha tan\beta tan\gamma \geq 3\sqrt{3} \tag{364}$$

Usando a desigualdade provada no problema anterior, temos que:

$$2(sen\alpha + sen\beta + sen\gamma) \leq 3\sqrt{3} \tag{365}$$

De (365) e (364), concluímos por transitividade que:

$$tan\alpha tan\beta tan\gamma \geq 2(sen\alpha + sen\beta + sen\gamma) \tag{366}$$

Note que $sen\alpha + sen\beta + sen\gamma = 4cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$, de onde podemos ver que a desigualdade acima é equivalente a desigualdade abaixo:

$$tan\alpha tan\beta tan\gamma \geq 8cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2} \tag{367}$$

Usando o seno do arco duplo em (367), o problema se resolve.

72.(Problema sugerido por Israel Meireles Chrisostomo)Demonstre que:

$$(cot\alpha + cot\beta + cot\gamma)(cos\alpha sen(\beta + \gamma) + cos\beta sen(\alpha + \gamma) + cos\gamma sen(\alpha + \beta)) =$$
$$(cot\alpha cot\beta + cot\alpha cot\gamma + cot\beta cot\gamma) \times (sen\alpha sen(\beta + \gamma) + sen\beta sen(\alpha + \gamma) + sen\gamma sen(\alpha + \beta))$$

Para todo α, β, γ real, tal que $\alpha+\beta, \alpha+\gamma, \beta+\gamma \neq k\pi$, $\dfrac{(2k+1)\pi}{2} \neq \alpha, \beta, \gamma \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Solução: Usando a identidade provada na primeira solução do problema 4, isto é, a "Igualdade A" da página 29.Faça a substituição $x = cot\alpha, y = cot\beta, z = cot\gamma$.

73.("Putnam and Beyond"-Titu Andreescu)Let a, b, c be the side lengths of a triangle with semiperimeter 1. Prove that:

$$ab + bc + ac - abc \leq \frac{28}{27}$$

Solução: Multiplicando a desigualdade por $\frac{1}{4}$, teremos:

$$\frac{a}{2}\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\frac{c}{2} + \frac{a}{2}\frac{c}{2} - 2\frac{a}{2}\frac{b}{2}\frac{c}{2} \leq \frac{7}{27}$$

Fazendo $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{c}{2}$ essa desigualdade é equivalente a:

$$xy + xz + yz - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

Bem como a condição para que essa desigualdade seja verdadeira é que $x + y + z = 1$.Já provamos isto na questão 31, página 115.

74. Prove a lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos(\alpha)$$

Onde alpha é um ângulo de um triângulo qualquer, e a, b, c são lados do triângulo, tal que alpha é oposto ao lado a.

Solução: Sejam x, y, z reais positivos.Observe que:

$$(x+y)(x+z)(y+z) = (x+y)(xy+xz+yz+z^2) = (x+y)xy + z(x+y)(x+y+z) = (x+y)xy + xz(x+z) + yz(y+z) + 2xyz$$

Sendo assim temos que:

$$(x+y)(x+z)(y+z) = (x+y)xy + xz(x+z) + yz(y+z) + 2xyz \tag{368}$$

Dividindo ambos os lados da igualdade acima por $(x+y)(x+z)(y+z)$, teremos:

$$1 = \frac{xy}{(x+z)(y+z)} + \frac{xz}{(x+y)(y+z)} + \frac{yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{2xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)} \tag{369}$$

Podemos fazer a substituição $m' = \sqrt{\frac{yz}{(x+z)(x+y)}}$, e por simetria definir:

$$m' = \sqrt{\frac{yz}{(x+z)(x+y)}} \tag{370}$$

$$n' = \sqrt{\frac{xz}{(x+y)(y+z)}} \tag{371}$$

$$o' = \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}} \tag{372}$$

Se efetuarmos essa substituição em (369), teremos que:

$$m'^2 + n'^2 + o'^2 + 2m'n'o' = 1$$

Já provamos, no problema 3 (página 20), que isto implica que podemos fazer a substituição $m' = sen\frac{\alpha}{2}, n' = sen\frac{\beta}{2}, o' = sen\frac{\gamma}{2}$ sendo $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.Pela transformação de Ravi, ou seja $a = y+z, b = x+z, c = x+y$, a, b, c serão lados de um triângulo e valerá:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$$

Onde S é o semiperímetro desse triângulo.Mas já provamos na página 27, que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos(\alpha) \Leftrightarrow sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times cos(\beta) \Leftrightarrow sen\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{ac}}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times cos(\gamma) \Leftrightarrow sen\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{ab}}$$

Onde as duas últimas igualdades foram verificadas pela simetria.Não sabemos se a,b,c são opostos aos lados α, β, γ.Na verdade, não sabemos sequer se a,b,c pertencem ao mesmo triângulo de ângulos α, β, γ.Para provar isso, observe que b é uma solução da equação:

$$x^2 + c^2 - 2xc \times cos\alpha - a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

Por Bháskara temos que:

$$x = b = ccos\alpha \pm \sqrt{c^2cos^2\alpha - (c^2 - a^2)} = ccos\alpha \pm \sqrt{-c^2sen^2\alpha + a^2}$$

Pegue a solução que é positiva ou a negativa[20].Por comodidade, vamos pegar a positiva, a saber $b = ccos\alpha + \sqrt{-c^2sen^2\alpha + a^2}$, multiplique ambos os lados por 2b e teremos $2b^2 = 2bccos\alpha + \sqrt{-4b^2c^2sen^2\alpha + 4a^2b^2} \Leftrightarrow 2b^2 = b^2 + c^2 - a^2 + \sqrt{-4b^2c^2sen^2\alpha + 4a^2b^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{-4b^2c^2sen^2\alpha + 4a^2b^2} \Leftrightarrow (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 4a^2b^2 - 4b^2c^2sen^2\alpha$.De onde concluímos que:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 = 4a^2b^2 - 4b^2c^2sen^2\alpha \tag{373}$$

Por outro lado, veja que $(a^2+b^2-c^2)^2 = 4a^2b^2cos^2\gamma = 4a^2b^2 - 4a^2b^2sen^2\gamma$. De onde concluímos que:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 = 4a^2b^2 - 4a^2b^2sen^2\gamma \tag{374}$$

De (373) e (374), teremos:

$$b^2c^2sen^2\alpha = a^2b^2sen^2\gamma \tag{375}$$

Por simetria, teremos[21]:

$$bcsen\alpha = absen\gamma = acsen\beta \tag{376}$$

E veja que isto implica, olhando para área do triângulo, ou mesmo, pela lei dos senos, que os lados a, b, c pertencem ao mesmo triângulo de ângulos α, β, γ e são opostos a α, β, γ.Vou dar detalhes aqui de como provar esta implicação.Primeiramente separemos (376) nas seguintes igualdades:

$$csen\alpha = asen\gamma \tag{377}$$

$$bsen\alpha = asen\beta \tag{378}$$

[20]Se pegássemos a solução com somente um delta negativo, obteríamos o mesmo resultado(mas nesse caso, o triângulo seria obtuso).

[21]Observe que o seno é positivo de 0 até π, e portanto podemos extrair a raíz.

$$bsen\gamma = csen\beta \tag{379}$$

Sabemos pela lei dos senos que existe α', β', γ' tal que $\dfrac{a}{sen\alpha'} = \dfrac{b}{sen\beta'} = \dfrac{c}{sen\gamma'} = 2R$ .Essas igualdades implicam:

$$csen\alpha' = asen\gamma' \tag{380}$$

$$bsen\alpha' = asen\beta' \tag{381}$$

$$bsen\gamma' = csen\beta' \tag{382}$$

Multiplicando (380) por (377),(381) por (378),(382) por (379), obtemos:

$$sen\gamma' sen\alpha = sen\alpha' sen\gamma \tag{383}$$

$$sen\gamma' sen\beta = sen\beta' sen\gamma \tag{384}$$

$$sen\alpha' sen\beta = sen\beta' sen\alpha \tag{385}$$

Temos então um sistema para resolvermos.Faça $x = sen\alpha, x' = sen\alpha', y = sen\beta, y' = sen\beta', z = sen\gamma, z' = sen\gamma'$ e teremos o sistema:

$$x'y = xy' \tag{386}$$

$$x'z = xz' \tag{387}$$

$$y'z = yz' \tag{388}$$

Observe que $\dfrac{x'}{x} = \dfrac{z'}{z}, \dfrac{x}{x'} = \dfrac{z}{z'} \Rightarrow \dfrac{x'}{x} + \dfrac{x}{x'} = \dfrac{z}{z'} + \dfrac{z'}{z}$ e por simetria concluímos:

$$\frac{x'}{x} + \frac{x}{x'} = \frac{z}{z'} + \frac{z'}{z} \tag{389}$$

$$\frac{x'}{x} + \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} + \frac{y'}{y} \tag{390}$$

$$\frac{z'}{z} + \frac{z}{z'} = \frac{y}{y'} + \frac{y'}{y} \tag{391}$$

Fazendo $\dfrac{x}{x'} = m, \dfrac{y}{y'} = n, \dfrac{z}{z'} = o$, teremos:

$$m + \frac{1}{m} = \frac{1}{o} + o \tag{392}$$

$$m + \frac{1}{m} = \frac{1}{n} + n \tag{393}$$

$$o + \frac{1}{o} = \frac{1}{n} + n \tag{394}$$

Veja que $o + \dfrac{1}{o} = \dfrac{1}{n} + n \Leftrightarrow o - n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{o} \Leftrightarrow o - n = \dfrac{o-n}{no} \Leftrightarrow n = \dfrac{1}{o} \Leftrightarrow \dfrac{y}{y'} = \dfrac{z'}{z} \Leftrightarrow yz = y'z'$, multiplicando essa última igualdade por (388), temos que $z^2 = z'^2 \Leftrightarrow z = z'$ e daí teremos por simetria que $x = x', y = y', z = z'$. E isto implica não apenas que a, b, c pertencem ao mesmo triângulo que os ângulos α, β, γ, como implica que os lados a, b, c são opostos à α, β, γ.De fato, isso pode não parecer claro a primeira vista, dado que o seno não é uma função bijetora em todo intervalo $(0, \pi)$.Mas perceba que particionando o intervalo $(0, \pi)$ em dois subintervalos de tamanho $\frac{\pi}{2}$, pelo princípio da casa dos pombos, dos três ângulos α', β', γ', pelo menos dois pertencerão ao mesmo intervalo.Então, temos duas possibilidades: ou dois desses ângulos pertencem ao primeiro quadrante ou ao segundo quadrante.Se dois ângulos pertencerem ao segundo quadrante teremos um absurdo, pois a soma dos três ângulos é igual π.Portanto, dois ângulos pertencem ao intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, intervalo onde a função seno é bijetora, isso também vale para os ângulos α, β, γ.Portanto, podemos concluir pela igualdade que obtivemos do sistema acima, que pelo menos dois pares de ângulos são iguais, digamos, $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$.Então $\alpha' + \beta' + \gamma' = \pi = \alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma \Leftrightarrow \gamma = \gamma'$.O que implica que todos os ângulos são iguais.

Talvez o leitor esteja pensando que haja a possibilidade de que α pertença ao primeiro quadrante e α' não, veja que isso não pode ocorrer.Se isso acontecer, como $sen(\alpha) = sen\alpha' = sen(\pi - \alpha')$, então $\pi - \alpha'$ também pertence ao primeiro quadrante, e daí então $\alpha = \pi - \alpha' = \beta' + \gamma'$, suponha, sem perda de generalidade que $\beta = \beta'$, pois a igualdade entre dois ângulos deve ocorrer pelo menos uma vez.Para ver isso, construamos dois conjuntos A e B, tais que $A = \{agudo, agudo, obtuso\}$ e $B = \{agudo, agudo, obtuso\}$.Queremos definir uma bijeção entre esses conjuntos e provar que pelo menos um ângulo agudo do conjunto A leva um outro ângulo agudo no conjunto B.Veja, que na pior das hipóteses, teremos um ângulo agudo do conjunto A com um obtuso do conjunto B e outro ângulo agudo do conjunto B com um obtuso do conjunto A, e daí sobram dois agudos nos dois conjuntos, que devem ser necessariamente levados um no outro, prova-se assim que podemos supor que $\beta = \beta'$.Daí então temos duas possibilidades, ou $\gamma = \gamma'$(o que é um absurdo, pois isto implica que $\gamma + \beta = \alpha \Rightarrow \pi = \alpha + \gamma + \beta = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$, o que não pode ocorrer, pois α pertence ao primeiro quadrante) ou $\pi - \gamma = \gamma'$(o que implica que $\alpha + \alpha' + \gamma + \gamma' = 2\pi$ outro absurdo).Essa última igualdade, vem da possibilidade de que haja um ângulo obtuso entre os ângulos α, β, γ, e daí então a igualdade $sen(\gamma') = sen(\gamma) = sen(\pi - \gamma)$ implica que $\pi - \gamma = \gamma'$, pois $\pi - \gamma$ pertencerá ao primeiro quadrante[22].

[22] $A = \{agudo, agudo, agudo\}$ e $B = \{agudo, agudo, obtuso\}$, é fácil perceber o absurdo.

75.(Cálculo, Volume 2-Serge Lang)Se A, B são dois vetores no espaço n-dimensional, denotemos por $d(A,B)$ a distância entre A e B, isto é $d(A,B) = \|A-B\|$.Mostre que para três vetores quaisquer A, B, C temos

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(B,C)$$

Solução: Seja $A = (a_1, ..., a_n)$,$B = (b_1, ..., b_n)$ e $C = (c_1, ..., c_n)$, então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela definição de módulo, temos:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k-c_k)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k-c_k)^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n}|(a_k-c_k)||(b_k-c_k)|\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}|(a_k-c_k)(b_k-c_k)|\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-c_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k-c_k)^2} \geq \sum_{k=1}^{n}|(a_k-c_k)(b_k-c_k)| \geq \sum_{k=1}^{n}(a_k-c_k)(c_k-b_k) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(c_k-b_k) - \sum_{k=1}^{n}c_k(c_k-b_k) \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-c_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k-c_k)^2} + \sum_{k=1}^{n}c_k(c_k-b_k) \geq \sum_{k=1}^{n}a_k(c_k-b_k) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-c_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k-c_k)^2} + \sum_{k=1}^{n}c_k^2 - \sum_{k=1}^{n}c_kb_k - \sum_{k=1}^{n}c_ka_k \geq -\sum_{k=1}^{n}b_ka_k \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-c_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k-c_k)^2} + 2\sum_{k=1}^{n}c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}c_kb_k - 2\sum_{k=1}^{n}c_ka_k \geq -2\sum_{k=1}^{n}b_ka_k \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-c_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k-c_k)^2} + \left(\sum_{k=1}^{n}c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}c_kb_k + \sum_{k=1}^{n}b_k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}c_ka_k\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right) \geq$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}b_ka_k + \sum_{k=1}^{n}b_k^2 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-c_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k-c_k)^2} + \sum_{k=1}^{n}(c_k-b_k)^2 + \sum_{k=1}^{n}(c_k-a_k)^2 \geq \sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(c_k-b_k)^2}\right)^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-c_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k-c_k)^2} + \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(c_k-a_k)^2}\right)^2 \geq \sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(c_k-b_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(c_k-a_k)^2}\right)^2 \geq \sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(c_k-b_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(c_k-a_k)^2} \geq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2} \Leftrightarrow d(A,C) + d(B,C) \geq d(A,B)$$

76. Calcule a integral:

$$\int \frac{1}{1+x+x^2}dx$$

Solução: Observe que $x^2+x+1 = \frac{3}{4}\times\left(\frac{4x^2+4x+4}{3}\right) = \frac{3}{4}\left(1+\frac{4x^2+4x+1}{3}\right) = \frac{3}{4}\left(1+\frac{(2x+1)^2}{3}\right) = \frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$, disso concluímos que:

$$\int \frac{1}{1+x+x^2}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}dx$$

Fazendo $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = u \Rightarrow du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}du$ e então nossa integral pode ser reescrita como:

$$\int \frac{1}{1+x+x^2}dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+K$$

77. Calcule a integral:

$$\int \arctan(x)dx$$

Solução: Faça $x = tana \Rightarrow dx = sec^2ada$, tem-se que a integral é equivalente a:

$$\int \arctan(x)dx = \int asec^2ada$$

Fazendo $a = u \Rightarrow da = du$ e $dv = sec^2a \Rightarrow v = tana$, tem-se por integração por partes:

$$\int \arctan(x)dx = \int asec^2ada = atana - \int tanada = atana - \ln|seca| = x\arctan x - \ln\sqrt{x^2+1}$$

78. Calcule a integral:

$$\int \ln(x^2+x+1)dx$$

Solução: Fazendo $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}dx = du \Rightarrow u = \ln(x^2+x+1)$ e $dv = dx \Rightarrow v = x$, obtemos, por integração por partes:

$$\int \ln(x^2+x+1)dx = x\ln(x^2+x+1) - \int \frac{2x^2+x}{x^2+x+1}dx =$$

$$x\ln(x^2+x+1) - \int \frac{2x^2+2+2x+2-2-x}{x^2+x+1}dx =$$

$$x\ln(x^2+x+1) - 2x + \int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = x\ln(x^2+x+1) - 2x + \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+x+1}dx =$$

$$x\ln(x^2+x+1) - 2x + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

Para calcular a primeira integral, faça $u = x^2+x+1 \Rightarrow du = (2x+1)dx$ e teremos $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln u = \ln(x^2+x+1)$, e daí teremos:

$$\int \ln(x^2+x+1)dx = x\ln(x^2+x+1) - 2x + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K$$

79. Mostre que toda dízima periódica é um número racional, encontre a fração geratriz.

Solução:

Demonstração. Seja a sequência finita de números naturais $a_1, a_2, a_3, ..., a_k; a_1 \neq 0; 0 \leq a_j \leq 9, \forall j \in \mathbb{N}$, isto é, uma sequência de algarismos.Então o produto de $\overline{a_1a_2a_3...a_k}$ (onde $\overline{a_1a_2a_3...a_k} = a_1 \times 10^{k-1} + a_2 \times 10^{k-2} + a_3 \times 10^{k-3}... + a_k$) por z é igual a $\underbrace{\overline{a_1a_2a_3...a_k....a_1a_2a_3...a_k}}_{m+1\ vezes}$.Onde z é um número com a seguinte lei de formação: z começa com 1, seguido de k-1 zeros, seguido de um número 1, seguido de k-1 zeros, seguido de um número 1, e assim por diante(num total de m vezes), isto é, um número que começa e termina com 1, e sempre há, entre dois números 1's, k-1 zeros. Ou seja $z = \underbrace{1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1...}_{m(k-1)\ zeros}$.Façamos a prova por indução sobre m, como base de indução tome $m = 1$, como hipótese de indução, suponha que a igualdade abaixo seja verdadeira para algum m:

$$\underbrace{1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1...}_{m(k-1)\ zeros} \times \overline{a_1a_2a_3...a_k} = \underbrace{\overline{a_1a_2a_3...a_k....a_1a_2a_3...a_k}}_{m+1\ vezes}$$

O que queremos provar é que:

$$\underbrace{1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1...}_{(m+1)(k-1)\ zeros} \times \overline{a_1a_2a_3...a_k} = \underbrace{\overline{a_1a_2a_3...a_k....a_1a_2a_3...a_k}}_{m+2\ vezes}$$

Como $\underbrace{1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1...}_{(m+1)(k-1)\ zeros} = 10^{(m+1)k} + \underbrace{1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1...}_{m(k-1)\ zeros} \Rightarrow$

$\underbrace{1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1...}_{(m+1)(k-1)\ zeros} \times \overline{a_1a_2a_3...a_k} = (10^{(m+1)k} + \underbrace{1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1...}_{m(k-1))\ zeros}) \times$

$\overline{a_1a_2a_3...a_k} = \overline{a_1a_2a_3...a_k} \times 10^{(m+1)k} + \underbrace{1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1 \quad \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros} \quad 1...}_{m(k-1)\ zeros} \times \overline{a_1a_2a_3...a_k} =$

$\overline{a_1a_2a_3...a_k} \times 10^{(m+1)k} + \underbrace{\overline{a_1a_2a_3...a_k....a_1a_2a_3...a_k}}_{m+1\ vezes} = \underbrace{\overline{a_1a_2a_3...a_k....a_1a_2a_3...a_k}}_{m+2\ vezes}$

Daí então, teremos:

$$1\underbrace{\underbrace{0...0}_{k-1\ zeros}\ 1\ \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros}\ 1...}_{m(k-1)\ zeros}\times\overline{a_1a_2a_3...a_k}=\underbrace{\overline{a_1a_2a_3...a_k....a_1a_2a_3...a_k}}_{m+1\ vezes} \tag{395}$$

Multipliquemos a igualdade acima por $10^{-(m+1)k+1}$ teremos:

$$0,\underbrace{0..0}_{k-2\ zeros}\underbrace{1\ \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros}\ 1\ \underbrace{0...0}_{k-1\ zeros}\ 1...}_{m(k-1)\ zeros}\times\overline{a_1a_2a_3...a_k}=\underbrace{\overline{a_1,a_2a_3...a_k....a_1a_2a_3...a_k}}_{m+1\ vezes} \tag{396}$$

Por outro lado, observe que no lado esquerdo temos uma P.G. cujo primeiro termo é $10^{-(k-1)}$ e cuja razão é igual a $\dfrac{10^{-(2k-1)}}{10^{-(k-1)}}=10^{-k}$, e cujo último termo depende de m, como estamos interessados em valores de m arbitrariamente grande, pegue o limite de m tendendo ao infinito, e teremos que:

$$\underbrace{\overline{a_1,a_2a_3...a_k....a_1a_2a_3...a_k}}_{\infty}=\frac{1}{10^{k-1}\left(1-\frac{1}{10^k}\right)}\times\overline{a_1a_2a_3...a_k}=\frac{1}{10^{k-1}-0,1}\times\overline{a_1a_2a_3...a_k} \tag{397}$$

Como k é finito, o resultado segue.Não só fomos capazes de demonstrar que o número é racional como encontramos uma fórmula geral para encontrarmos frações de dízimas periódicas.

$\square$

80.(Problema Sugerido por Israel Meireles Chrisotomo)Partindo do princípio que o leitor conheça a demonstração tradicional para a fórmula que dá a soma dos termos de uma Progressão Geométrica.Mostre, com um argumento totalmente diferente ao usado tradicionalmente, a fórmula que retorna a soma dos termos de uma Progressão Geométrica.

Solução:

Demonstração. Primeiramente observe as identidades:

$$\left(r-\frac{1}{r}\right)\left(r^{n-k-1}+\frac{1}{r^{n-k-1}}\right)=\left(r^{n-k}-\frac{1}{r^{n-k}}\right)+\left(-r^{n-k-2}+\frac{1}{r^{n-k-2}}\right) \tag{398}$$

$$\left(r-\frac{1}{r}\right)\left(r^{n-k-1}-\frac{1}{r^{n-k-1}}\right)=\left(r^{n-k}+\frac{1}{r^{n-k}}\right)-\left(r^{n-k-2}+\frac{1}{r^{n-k-2}}\right) \tag{399}$$

Aplicando o somatório variando em k, nas duas igualdades acima, teremos:

$$\sum_{k=0}^{n-2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\left(r^{n-k-1}+\frac{1}{r^{n-k-1}}\right)=\sum_{k=0}^{n-2}\left(r^{n-k}-\frac{1}{r^{n-k}}\right)+\sum_{k=0}^{n-2}\left(-r^{n-k-2}+\frac{1}{r^{n-k-2}}\right)= r^n-\frac{1}{r^n}+r^{n-1}-\frac{1}{r^{n-1}}+\frac{1}{r}-r \tag{400}$$

$$\sum_{k=0}^{n-2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\left(r^{n-k-1}-\frac{1}{r^{n-k-1}}\right)=\sum_{k=0}^{n-2}\left(r^{n-k}+\frac{1}{r^{n-k}}\right)-\sum_{k=0}^{n-2}\left(r^{n-k-2}+\frac{1}{r^{n-k-2}}\right)= r^n+\frac{1}{r^n}+r^{n-1}+\frac{1}{r^{n-1}}-2-r-\frac{1}{r} \tag{401}$$

Somando os extremos de (400) e (401), lado esquerdo com lado esquerdo e lado direito com lado direito, e dividindo o resultado por 2, teremos:

$$\sum_{k=0}^{n-2}\left(r-\frac{1}{r}\right)r^{n-k-1}=r^n+r^{n-1}-1-r=r(r^{n-1}-1)+r^{n-1}-1=(r+1)(r^{n-1}-1)\Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{r^2-1}{r}\right)r^{n-k-1}=(r+1)(r^{n-1}-1)\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{r-1}{r}\right)(r+1)r^{n-k-1}=(r+1)(r^{n-1}-1)\Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n-2}r^{n-k-1}=\frac{r(r^{n-1}-1)}{r-1}$$

□

81.(Problema Sugerido por Israel Meireles Chrisotomo)Demonstre a série de Taylor do seno de forma elementar, ou seja, não use derivadas ou qualquer definição em que o conceito de derivadas esteja implícito, e ainda, sem usar a série de Taylor da exponencial ou o limite exponencial fundamental.Isto é, use somente a definição trigonométrica do seno e nada mais.Dica: Use teoremas da Análise Real.

Solução:

Demonstração. Basicamente, precisaremos de um teorema da Análise muito importante, cuja demonstração raramente aparece nos livros de Análise, conhecido como Tannery's Theorem.O teorema de Tannery é uma versão discreta do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.Para começar, vamos enunciar o teorema de Tannery:

Proposição 1 For each natural number n, let $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(n)$ be a convergent series .If for each k, $\lim_{n\to\infty} a_k(n) = a_k$, and $|a_k(n)| \leq M_k$ for all n where the series $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converges, then $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Isto significa dizer, que sob certas condições é possível afirmar que dada uma série arbitrária, o limite da soma é a soma dos limites, desde que se verifique as condições do Tannery's Theorem.Este resultado é um resultado simples de ser provado, contudo, muito importante, devido a mobilidade que ganhamos ao se passar o limite para dentro da soma infinita. Outro resultado importante que vamos usar consiste na desigualdade abaixo:

Proposição 2 Seja n um número natural, n! o produto de todos os números naturais menores ou iguais a n, e seja o binômio $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!n-k!}$, então, vale que:

$$\binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!}$$

Por definição, temos que:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!n-k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))(n-k)!}{k!n-k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}$
Como

$n-1 < n$
$n-2 < n$
$n-3 < n$
....
$n-(k-1) < n$

Multiplicando todas as desigualdades acima, obtemos:

$(n-1)(n-2)...(n-(k-1)) < n^{k-1}$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $\frac{n}{k!}$, obtemos:

$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} < \frac{n^k}{k!}$

Como $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}$, segue que:

$$\binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!}$$

Vamos a solução do problema.Primeiramente, vamos definir uma função $f_n(z)$ tal que

$f_n(z) = \frac{1}{2i}\left(\left(1+itan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1} - \left(1-itan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}\right)$

Vamos estudar algumas propriedades dessa função.Para isto, vamos expandir a função pelo binômio de Newton, veja como podemos fazer isto:

$$\frac{1}{2i}\left(\left(1+itan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1} - \left(1-itan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}\right) =$$
$$\frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left(itan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^k - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left(-itan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^k\right) =$$
$$\frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left(itan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^k - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}\left(itan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^k\right) =$$
$$\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\left(itan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2k+1} =$$
$$\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{n}i^{2k+1}\binom{2n+1}{2k+1}\left(tan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2k+1} =$$

$$\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{n} i^{2k}.i\binom{2n+1}{2k+1}\left(tan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2k+1} =$$
$$\frac{i}{i}\sum_{k=0}^{n} i^{2k}\binom{2n+1}{2k+1}\left(tan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2k+1} =$$
$$\sum_{k=0}^{n} (i^2)^{k}\binom{2n+1}{2k+1}\left(tan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2k+1} =$$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\binom{2n+1}{2k+1}\left(tan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2k+1}$$

De onde concluímos que:

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\binom{2n+1}{2k+1}\left(tan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2k+1} ......Igualdade\ i$$

Vamos memorizar a igualdade acima, e partir novamente da função $f_n(z)$ e chegar a algumas conclusões importantes, veja:

$$f_n(z) = \frac{1}{2i}\left(\left(1+itan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1} - \left(1-itan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{isen\left(\frac{z}{2n+1}\right)}{cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{isen\left(\frac{z}{2n+1}\right)}{cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)}\right)^{2n+1}\right) =$$
$$\frac{1}{2i}\left(\left(\frac{cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)+isen\left(\frac{z}{2n+1}\right)}{cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)}\right)^{2n+1} - \left(\frac{cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)-isen\left(\frac{z}{2n+1}\right)}{cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)}\right)^{2n+1}\right) =$$
$$\frac{1}{2i}\left(\frac{\left(cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)+isen\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}}{\left(cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}} - \frac{\left(cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)-isen\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}}{\left(cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{cosz+isenz}{\left(cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}} - \frac{cosz-isenz}{\left(cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{2isenz}{\left(cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}}\right) = \frac{senz}{\left(cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}}$$

De onde concluímos que:

$$f_n(z) = \frac{senz}{\left(cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}} ....Igualdade\ ii$$

Das igualdades i e ii, concluímos que:

$$\frac{senz}{\left(cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(tan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2k+1}$$

Tomando o limite de n tendendo ao infinito em ambos os lados da igualdade, vem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{senz}{\left(cos\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(tan\left(\frac{z}{2n+1}\right)\right)^{2k+1}$$

Defina uma sequência x_n, tal que:

$$x_n := (2n+1)tan\left(\frac{z}{2n+1}\right)$$

Daí então temos que $\frac{z}{2n+1} = arctan\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)$, vem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{senz}{\left(cos\left(arctan\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)\right)\right)^{2n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(tan\left(arctan\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)\right)\right)^{2k+1}$$

Usando a identidade trigonométrica $cosx = \frac{1}{\sqrt{1+tan^2x}}$, vem que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{senz}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+tan^2\left(arctan\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)\right)}}\right)^{2n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(tan\left(arctan\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)\right)\right)^{2k+1}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{senz}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^2}}\right)^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^{2k+1}.$$

Aqui podemos ver que estamos próximos de encontrar a série de Taylor do seno, mas alguns problemas permanecem, por exemplo, temos um limite a ser calculado no denominador do seno ao lado esquerdo, por outro lado, temos que a série está na variável x e não na variável z, e portanto, o argumento do seno ao lado esquerdo não corresponde com a variável x no lado direito.Mas esses problemas podem ser facilmente resolvidos se percebermos que o limite no denominador tende para 1, bem como a substituição que efetuamos foi propositalmente efetuada por nos permitir voltar facilmente da variável x para variável z, pois temos a seguinte implicação

$$\frac{z}{2n+1} = arctan\frac{x_n}{2n+1} \Rightarrow tan\left(\frac{z}{2n+1}\right) = \frac{x_n}{2n+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_n = (2n+1)tan\left(\frac{z}{2n+1}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(2n+1)tan\left(\frac{z}{2n+1}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = z$$

E como nosso limite tende ao infinito, podemos ver, por essa substituição, que podemos voltar a variável z a qualquer momento, para isto precismos apenas passar o limite para dentro do somatório.Para tanto, o primeiro passo para passar o limite para dentro do somatório da série $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^{2k+1}$, precisamos encontrar um majorante para $\left|\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^{2k+1}\right|$ que é o coeficiente da série.Mas isto não é difícil, basta observar que:

$$\binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!}$$

Substituindo n por 2n+1 e k por 2k+1, vem:

$$\binom{2n+1}{2k+1} < \frac{(2n+1)^{2k+1}}{2k+1!}$$

Multiplicando os dois lados por $\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^{2k+1}$, vem

$$\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^{2k+1} < \frac{(2n+1)^{2k+1}}{2k+1!}\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^{2k+1} = \frac{x_n^{2k+1}}{2k+1!} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^{2k+1} < \frac{x_n^{2k+1}}{2k+1!}$$

Dado que toda sequência convergente é limitada, existe $l \in \mathbb{R}^+$tal que $|x_n| \leq l$.Provamos, então, que $|a_k(n)| \leq M_k$, a outra condição que devemos satisfazer é que $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ deve convergir, isto é a série $\sum_{k=0}^{n}\frac{l^{2k+1}}{2k+1!}$ deve convergir, mas isto é fácil de provar, basta usar o teste da razão e verificar que o raio de convergência dessa série é infinita.Com estas condições satisfeitas, podemos passar o limite para dentro da série infinita e agora, basta calcularmos o limite, pois acabamos de provar que vale a igualdade:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^{2k+1} =$$
$$\sum_{k=0}^{n}\lim_{n\to\infty}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^{2k+1}$$

Para calcular o limite acima, considere que

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^{2k+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^k\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)...(2n+1-2k)}{2k+1!}\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^{2k+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^k\frac{x_n^{2k+1}}{2k+1!}\left(\frac{2n+1}{2n+1}\right)\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)...\left(\frac{2n+1-2k}{2n+1}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^k\frac{x_n^{2k+1}}{2k+1!}\left(\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{2n}}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{2n}}\right)...\left(\frac{1+\frac{1-2k}{2n}}{1+\frac{1}{2n}}\right)$$

Considerando que $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=z$, vem que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2k+1!}$$

Substituindo na Relação i, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{senz}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^2}}\right)^{2n+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2k+1!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^2}\right)^{2n+1}senz=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2k+1!}$$

Agora, nos resta provar que o limite ao lado esquerdo é igual a 1.Para isto, provemos uma desigualdade auxiliar.Para todo ϕ real positivo, vale a desigualdade:

$$\log_5(\phi+1)\le\phi,\forall\phi;\phi\in\mathbb{R}^+ \tag{402}$$

Para provarmos isso, primeiramente, seja x, um número entre zero e um, e m um inteiro positivo, então é fácil ver que vale a desigualdade abaixo:

$$\left(1+\frac{1}{m+x}\right)^{m+x}\le\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} \tag{403}$$

Daí então, teremos, usando que $\frac{m+1}{m}\le 2,\forall m;m\in\mathbb{Z}^+$, e que $\frac{m-k}{m}<1,\forall k;k\in\mathbb{Z}^+$, e também que $2^n\le(n+1)!\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = 1+\frac{m+1}{m\times 1!}+\frac{(m+1)m}{m^2\times 2!}+\frac{(m+1)m(m-1)}{m^3\times 3!}+...+\frac{(m+1)!}{m^{m+1}\times (m+1)!} =$$
$$1+\frac{m+1}{m}\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{m-1}{m\times 3!}+\frac{(m-1)(m-2)}{m^2\times 4!}+...+\frac{(m-1)!}{m^{m-1}(m+1)!}\right) <$$
$$1+2\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{(m+1)!}\right) <$$
$$1+2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^m}\right) = 1+2(2-2^{-m}) = 5-2^{-(m-1)} \Leftrightarrow$$
$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} < 5-2^{-(m-1)} \tag{404}$$

Da igualdade (403) e de (404), temos que:

$$\left(1+\frac{1}{m+x}\right)^{m+x} \leq 5-2^{-(m-1)} < 5 \tag{405}$$

Como temos que todo número real positivo pode ser escrito com uma parte inteira positiva somado a uma parte fracionária, então teremos que, para todo y real e maior do que 1, vale a desigualdade:

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} \leq 5, \forall y > 1 \tag{406}$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados da desigualdade, teremos:

$$\log_5\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} \leq 1, \forall y > 1 \tag{407}$$

Multiplicando os dois lados por $\dfrac{\log_5(1+\phi)}{\log_5\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}$, teremos:

$$\log_5(1+x) \leq \frac{\log_5(1+\phi)}{\log_5\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}} = \log_{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}(1+\phi), \forall y > 1 \tag{408}$$

De onde concluímos que:

$$\log_5(1+\phi) \leq \log_{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}(1+\phi), \forall y > 1 \tag{409}$$

Agora observe que, pela desigualdade de Bernoulli(que pode ser provada facilmente usando indução), temos que, para todo ϕ real e n natural, vale a desigualdade:

$$1+\phi \leq \left(1+\frac{\phi}{n}\right)^{n} \tag{410}$$

Fazendo $\frac{1}{y} = \frac{\phi}{n}$, observe que para todo $\phi \in \mathbb{R}^+$ existe um valor de n natural e y real tal que a igualdade acima seja satisfeita(basta tomar $n > \phi$ e $y = \frac{n}{\phi}$) teremos:

$$1 + \phi \leq \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\phi y} \tag{411}$$

Tomando o logaritmo na base $\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y}$ na desigualdade acima, teremos:

$$\log_{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}(1 + \phi) \leq \phi \tag{412}$$

Pela última desigualdade e pela desigualdade (409), finalmente temos, por transitividade, que:

$$0 < \log_5(\phi + 1) \leq \phi, \forall \phi; \phi \in \mathbb{R}^+ \tag{413}$$

Queremos calcular o limite $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^2}\right)^{2n+1}$, note que $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^2}\right)^{2n+1} = 5^{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2}\right) \log_5 \left(\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^2 + 1\right)}$, observe que substituindo $\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^2$ por ϕ na desigualdade acima, temos que:

$$0 < \log_5 \left(\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^2 + 1\right) \leq \left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^2 \tag{414}$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{2n+1}{2}$, teremos:

$$0 < \frac{2n+1}{2} \log_5 \left(\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^2 + 1\right) \leq \frac{x_n^2}{4n+2} < \frac{l^2}{4n+2} \tag{415}$$

Tomando o limite, temos que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2}\right) \log_5 \left(\left(\frac{x_n}{2n+1}\right)^2 + 1\right) = 0$, pois l é fixo, e isso implica o resultado desejado. $\square$

Essa prova também pode ser estendida para provar a série de Taylor do cosseno.

Referências

[1] Titu Andreescu and Zuming Feng. *103 Trigonometry Problems: From the Training of the USA IMO Team*. Springer Science & Business Media, 2006.

[2] Zdravko Cvetkovski. *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Vardan Verdiyan e Daniel Campos Salas. Simple trigonometric substitutions with broad results. `http://www.gimnazija-izdijankoveckoga-kc.skole.hr/upload/gimnazija-izdijankoveckoga-kc/multistatic/663/Trigonometric_substitutions.pdf`.

[4] Razvan Gelca and Titu Andreescu. *Putnam and beyond*. Springer Science & Business Media, 2007.

[5] Serge Lang. Cálculo, vol. i. *Livro Técnico, Rio de Janeiro*, 1977.

[6] Serge Lang. Cálculo, vol. ii. *Livro Técnico, Rio de Janeiro*, 1977.

[7] Elon Lages Lima. Análise real volume 1. *Projeto Euclides*, 2008.

[8] Viktor N Litvinenko, Aleksandr Grigorevich Mordkovich, and Leonid Levant. *Solving problems in algebra and trigonometry*. Mir, 1987.

[9] Lynn Harold Loomis and Shlomo Sternberg. *Advanced calculus*. World Scientific Publishing Co Inc, 2014.

[10] Ulysses Sodré. Elementos de matemática. `http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/elementos/exercicios06.pdf`.

Meu Site

Meu Blog

IMO Oficial Site

Cornell University/Putnan Competition/site com vários links legais para bons livros- a maioria eu não li :)

Blog do Terence Tao

Mathematics Stack Exchange