SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
ROMANIAN MATHEMATICAL SOCIETY

Filiala Mehedinți - Mehedinți Branch
www.ssmrmh.ro

In any $\Delta\, ABC$ with $\prod(a^2 - bc) \neq 0$:

$$\frac{9(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{\sum(a^2 - bc)^2} < \sum\frac{1}{a^2 + bc} < \frac{1}{4Rr}$$

Proposed by Daniel Sitaru – Romania

Solution by Kevin Soto Palacios – Huarmey – Peru

Probar en totdo triángulo ABC, de tal manera que

$$(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) \neq 0$$

$$\frac{9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2} < \frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} < \frac{1}{4Rr}$$

De la condición se puede afirmar que

$$a^2 \neq bc, \quad b^2 \neq ca, \quad c^2 \neq ab \Leftrightarrow a \neq b \neq c$$

Además

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(b-c)^2 + \frac{1}{2}(c-a)^2 > 0$$

Como $a \neq b \neq c$

Aplicando la desigualdad de Cauchy

$$\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} > \frac{9}{a^2 + bc + b^2 + ca + c^2 + ab}$$

Por último

$$\frac{9}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} = \frac{9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)} =$$

$$= \frac{9(\sum a^2-ab)}{\sum(a^2-bc)^2} \quad \textit{(LQQD)}$$

donde $\rightarrow (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) =$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - (ab + bc + ca)^2 = \sum(a^2 - bc)^2$$

Como a, b, c son lados de un $\Delta\ ABC$ se cumple

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{1}{2Rr}$$

Es necesario probar

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}<\frac{1}{2ab}+\frac{1}{2bc}+\frac{1}{2ca}$$

Aplicando MA > MG

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}<\frac{1}{2a\sqrt{bc}}+\frac{1}{2b\sqrt{ca}}+\frac{1}{2c\sqrt{ab}}<$$

$$<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ba}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ca}+\frac{1}{cb}\right)=\sum\frac{1}{2ab}=\frac{1}{4Rr}$$